



KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2021-08-18

DEL I

1. Bestäm den största öppna mängd i $\mathbb{C}$ där

$$f(z) = f(x + iy) = e^y(\cos x - i \sin x)$$

är holomorf.

Lösning. Man ser direkt att $f(z) = \exp(-iz)$ som är komplext deriverbar i hela $\mathbb{C}$ (följer av deriveringsreglerna) och därför är f holomorf i hela komplexa planet. Alternativt kan man visa att f är holomorf i hela $\mathbb{C}$ genom Cauchy-Riemanns ekvationer tillsammans med det faktum att f är C^1 .

□

Svar: Hela komplex planet

2. Går det att utveckla $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ i en konvergent potensserie kring $z = 1$? Om det går, förklara varför och finn de tre första nollskilda termerna i denna potensserie, samt bestäm konvergensradien. Om det inte går, förklara varför det inte går.

Lösning. Eftersom f är komplext deriverbar (följer av deriveringsreglerna) i en omgivning av 1 så går det att utveckla f i en konvergent potensserie centrerad i 1. Konvergensradien är avståndet till närmsta singularitet, som är $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, så konvergensradien är $\sqrt{2} - \sqrt{2}$. De första termerna i serien fås genom derivering osv och de är

$$\frac{1}{2} - (z - 1) + \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \dots$$

□

Svar: Se lösningen

3. Bestäm alla värden som i^{-i} kan anta.

Lösning. Vi använder definitionen av komplexa potenser och får

$$i^{-i} = \exp(-i(\ln|i| + i \arg i)) = \exp\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)$$

för godtyckligt heltal n .

□

Svar: Se lösningen

DEL II

4. Beräkna, genom att bl a hänvisa till lämpliga satser, integralen

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(z)}{z(z-\pi)^2} dz$$

om γ är cirkeln $|z-3|=1$ genomlöst ett varv i positiv led. Formulera också de satser du hänvisar till.

Lösning. Integranden har endast en singularitet, $z = \pi$, innanför kurvan och vi får med residtysatsen att integralens värde är

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=\pi} \frac{\exp(z)}{z(z-\pi)^2} = \frac{2i(\pi-1)e^{\pi}}{\pi}$$

För formulering av residysatsen med alla förutsättningar, se boken!

□

Svar: Se lösningen

5. Bevisa Liouvilles sats.

Lösning. Se boken



Svar:

DEL III

6. Beräkna med residykalkyl den reella integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + 9)^2} dx$$

och förklara ordentligt alla steg i lösningen.

Lösning. Kalla integralen för I . Eftersom integranden är jämn och den generaliserade integralen konvergent så har vi att

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 9)^2} dx = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{(x^2 + 9)^2} dx = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\exp(ix)}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

Eftersom vidare, enligt ML-olikheten,

$$\left| \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 9)^2} dz \right| \leq \frac{\text{konst}}{R^3} \rightarrow 0$$

när $R \rightarrow \infty$ om C_R är en halvcirkel i övre halvplanet med start i R och slut i $-R$, så får vi att

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 9)^2} dz = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\exp(iz)}{(z^2 + 9)^2}, 3i \right)$$

om γ_R är den enkla slutna kurva som består i att man först genomlöper det slutna intervallet från $-R$ till R på reella axeln och sedan halvcirkeln C_R som beskrivits ovan. Vi har också då använt att den enda singulariteten till integranden innanför kurvan är en dubbel-pol i punkten $3i$, som vi lätt ser. Vi beräknar den sökta residyn till $e^{-3}/27i$ och därmed får vi att

$$I = \frac{\pi e^{-3}}{27}$$

□

Svar: $\pi e^{-3}/27$

7. Låt $p(z) = z^4 - 4z^2 + 2 - \exp(-z)$.

Hur många nollställen har p på imaginära axeln, $\operatorname{Re} z = 0$?

Hur många nollställen har p i högra halvplanet, $\operatorname{Re} z > 0$?

Lösning. På imaginära axeln är $z = iy$ för reellt y och $p(iy) = y^4 + 4y^2 + 2 + \cos y + i \sin y$ vilket till beloppet är större än eller lika med 1 så p har inga nollställen på imaginära axeln. För att bestämma antalet nollställen i högra halvplanet studerar vi bilden av en halvcirkelkurva och ser hur många varv den går runt origo och använder argumentprincipen/Nyquists metod. Vi observerar att på imaginära axeln och i högra halvplanet är absolutbeloppet av $\exp(-z)$ högst 1. På imaginära axeln är realdelen av p större än noll och $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} p(iy) = \infty$. Så om y här går från oändligheten till minus oändligheten börjar och slutar bildkurvan i plus oändligheten på reella axeln och går inget varv runt origo. Nu studerar vi p längs halvcirkelbågen runt origo med radie R för ett mycket stort positivt reellt tal R med start i $-Ri$ och slut i Ri . Här ser vi att $p(Re^{it}) \approx R^4 e^{i4t}$ när t går från $-\pi/2$ till $\pi/2$. I den processen börjar bildkurvan på positiva reella axeln går två varv runt origo och slutar på positiva reella axeln. Det finns alltså två nollställen i högra halvplanet. $\square$

Svar: Inga nollställen på imaginära axeln och två nollställen i högra halvplanet.

8. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som för alla $z, w \in \mathbb{C}$ uppfyller att

$$|f(z) - f(w)| \leq |z - w|^2.$$

Lösning. Låt w vara en godtycklig punkt i $\mathbb{C}$ och låt f uppfylla villkoret i uppgiften. Då gäller att

$$|f'(w)| = \left| \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \leq \lim_{z \rightarrow w} \frac{|z - w|^2}{|z - w|} = 0$$

så f har en derivata som är noll i alla punkter i komplexa planet. Det följer att f är konstant.

□
