



KTH Teknikvetenskap

SF1691 Komplex analys
Lösningsförslag till tentan den 7 juni 2021

DEL I

1. Låt $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} z^{n-1}$. Bestäm den största öppna mängd där f är holomorf och beräkna sedan också integralen $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3} dz$ där γ är cirkeln runt origo med radie $1/3$, genomlöst ett varv i positiv led.

Lösning. Med kvotkriteriet fås konvergensraden till

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(n+2)^2/(2(n+2))!}{(n+1)^2/(2(n+1))!}} = \infty$$

så f är holomorf i hela komplexa planet. Integralen blir $2\pi i c_2$, där c_2 är koefficienten framför z^2 i serien, dvs integralens värde blir $\pi i/40$. □

Svar: $\mathbb{C}$ och $\pi i/40$

2. Bestäm, om möjligt, en hel funktion $f(z) = f(x + iy)$ vars imaginärdel är $y^3 - 3x^2y + 1$.

Lösning. Man ser direkt (eller med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer) att $f(z) = -z^3 + i = -x^3 + 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y + 1)$ är en sådan funktion. $\square$

Svar:

Te ex $f(z) = -z^3 + i = -x^3 + 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y + 1)$ (men man kan lägga till en reell konstant också om man vill)

3. Bestäm en Möbiusavbildning som avbildar det inre av enhetscirkeln ($|z| < 1$) på högra halvplanet ($\operatorname{Re} w > 0$).

Lösning. Vi kan ta t ex $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, som tar 1 till oändlighetspunkten, -1 till 0 och i till i , vilket betyder att enhetscirkeln avbildas på imaginära axeln, samt tar 0 till 1 , vilket betyder att det inre av enhetscirkeln går till höger om imaginära axeln. Men det finns många andra sådana avbildningar.

□

Svar: T ex $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$

DEL II

4. Beräkna, genom att bl a hänvisa till lämpliga satser, integralen

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(z)}{z(z-2)^2} dz$$

om γ är cirkeln $|z-1|=3$ genomlöst ett varv i positiv led.

Lösning. Integranden är holomorf utom i $z=0$ och $z=2$. Båda dessa punkter ligger innanför kurvan. Med hjälp av residysatsen (alt kan Cauchys integralformel (för funktionen och derivatan) användas) fås att integralens värde blir $2\pi i$ multiplicerat med summan av residyerna av integranden i de båda punkterna. I 0 är residyn $1/4$ och i 2 är residyn (dubbelpol) $e^2/4$. Så integralens värde blir $\pi i(1+e^2)/2$.

□

Svar: $\pi i(1+e^2)/2$.

5. Bevisa Liouvilles sats.

Lösning. Se bokens kapitel 5.3



Svar:

DEL III

6. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $z^4 - z^3 + z = 1/5$ i området $1/2 < |z| < 2$.

Lösning. Sätt $p(z) = z^4 - z^3 + z - 1/5$. Vi söker antalet nollställen till p i området $1/2 < |z| < 2$. Vi använder Rouches sats två gånger.

Först på cirkeln $|z| = 2$. Låt $f(z) = z^4$ och $g(z) = -z^3 + z - 1/5$. Då är $p(z) = f(z) + g(z)$. Eftersom $|f(z)| = 32$ då $|z| = 2$ och $|g(z)| \leq 2^3 + 2 + 1/5 < 32$ (triangelolikheten) så har $f + g$ enligt Rouches sats lika många nollställen som f , dvs fyra, i området $|z| < 2$.

Sedan på cirkeln $|z| = 1/2$. Här låter vi istället $f(z) = z$ och $g(z) = z^4 - z^3 - 1/5$. Då är $p(z) = f(z) + g(z)$. Eftersom $|f(z)| = 1/2$ då $|z| = 1/2$ och $|g(z)| \leq 1/16 + 1/8 + 1/5 < 1/2$ (triangelolikheten) så har $f + g$ enligt Rouches sats lika många nollställen som f , dvs ett, i området $|z| < 1/2$.

Sammantaget har alltså p exakt tre nollställen i området $1/2 < |z| < 2$.

□

Svar: Tre

7. Beräkna med residykalkyl den reella integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Förklara ordentligt alla steg i lösningen.

Lösning. Kalla integralen I . Beloppet av integranden är mindre än $10/(1+x^2)$ på hela x -axeln och $10/(1+x^2)$ har en konvergent integral över x -axeln, så vår integral är konvergent och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x \, dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix} \, dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Ta ett stort positivt tal R . Låt C_R vara halvcirkeln med radie R och start i $(R, 0)$ och slut i $(-R, 0)$. Med hjälp ML-olikheten ses att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\exp(iz) \, dz}{(z^2 + 2z + 2)^2} = 0.$$

Om vi låter γ_R vara kurvan som består av intervallet från $-R$ till R på x -axeln följt av C_R så gäller alltså enligt ovan och enligt residysatsen att

$$I = \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{\exp(iz) \, dz}{(z^2 + 2z + 2)^2} = \operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 2z + 2)^2}.$$

Där har vi också använt att integranden har två singulariteter: dubbelpoler i $-1 \pm i$ där endast $-1 + i$ ligger innanför kurvan. Vi beräknar residyn med hjälp av formeln för residy i dubbelpol till $e^{-1-i}/2i$ och därmed blir integralens värde $-\pi e^{-1} \sin 1$.

□

Svar: $-\pi e^{-1} \sin 1$.

8. Beräkna $\int_{\gamma} f(\bar{z}) dz$ om f är en hel funktion och γ är enhetscirkeln ett varv i positiv led.
(Svaret får innehålla funktionsvärden och derivator av f).

Lösning. Vi använder definitionen av den komplexa kurvintegralen och parametriserar enhetscirkeln genom $\gamma(t) = e^{it}$ för t mellan 0 och 2π och använder att $e^{-it} = 1/e^{it}$. Vi får

$$\int_{\gamma} f(\bar{z}) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{-it}) i e^{it} dt = - \int_0^{-2\pi} f(e^{is}) i e^{-is} ds = \int_{-2\pi}^0 f(e^{is}) i e^{-is} ds = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} = 2\pi i f'(0).$$

I sista steget har vi använt Cauchys integralformel för derivatan.

□

Svar: $2\pi i f'(0)$
