

1691, F21

①

Sammanfattning:

Rekurs:

$$z = x + iy = r e^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta = \arg(z), \\ e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \\ z^n = ?$$

$$\bar{z} = x - iy, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Topologi: $D[a, r]$, $\bar{D}[a, r]$, $D[a, r] = ?$

Inre, rand, hopnings, isolerad - punkt.

Öppen/sluten mängd; $\partial G = \text{randen till } G$.

Område: Öppen + Sammanhängande
 $\uparrow ?$

Om G öppen: Sammanhängande $\Leftrightarrow$ bäddat sammanhängande. (horis/vert/kurvad)

Kurva: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, (kont), styckenvis glatt etc

γ glatt om: γ' existerar, kont. och $\gamma' \neq 0$.

Differentierbarhet / $\mathbb{C}$: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ "som vanligt"

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ differentierbar vid z_0 om $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

existerar, f holomorf vid z_0 (då i $D(z_0, r)$)
— " — på öppen $E \subset G$.

(2)

Rechenregeln: $(f+g)' = f' + g'$ etc. ("Summenregel").

f holomorph $f' \neq 0$: f bewahrt Winkel
(Konformabbildung).

Cauchy-Riemann: $f = u + iv$

f holomorph $\Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} + \text{kont. part. derivator}$
Kort: $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$.

$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch om $u_{xx} + u_{yy} = 0$
+ kont. ~~part. deriv.~~ ^{part. deriv.} av ordning 2

Sats: $f'(z) = 0 \quad \forall z \in G$ (område) $\Rightarrow f$ konstant.
 $\Leftrightarrow \updownarrow$ Bervis: bøjvst sammanh.!

Ex. på komplexa funktioner

Möbius: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$.

$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} = \infty$. $(\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \dots ?)$

Riemannskuren: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Möbius: $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Krysskvot $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3] := \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$.

$\Rightarrow f(z_1) = 0, f(z_2) = 1, f(z_3) = \infty$.

Exp/trig funktioner:

(3)

$$* \exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy).$$

$$\text{Rechenregeln: } \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = ? \text{ etc} \\ \frac{d}{dz} (\exp(z)) = \exp(z). \\ (\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)).$$

$$* \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$* \operatorname{Log}(z): \text{invers till } \exp(z). \quad (\text{försiktig}).$$

Givet område G är $\operatorname{Log}: G \rightarrow \mathbb{C}$ en gren

till logaritmfunktionen om $\exp(\operatorname{Log}(z)) = z$

och Log är kontinuerlig. Ex $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$.
(prim. arg: $\arg \in (-\pi, \pi]$)

Principaltgren till $\log$: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.
($z \neq 0$!)

Prop: $\frac{d}{dz} (\operatorname{Log}(z)) = \frac{1}{z}$ (oavsett val av gren).

Def: $a^b := \exp(b \operatorname{Log}(a))$, Log prim. gren.

Kurintegration: givet kurva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

~~Även~~ $\mathbb{C}$ Nymer egenskaper: $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f$.

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

(4)

Primitiv funktion till f : F så att $F' = f$.

Knappst: $f(z) = \frac{1}{z}$ ok för $z \neq 0$, men knappt

hitta F så att $F'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \neq 0$.

Sats: $\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

(om $F' = f$ på området G , $\gamma \subset G$)

Följd: γ sluten ($\gamma(a) = \gamma(b)$)

$\Rightarrow \int_{\gamma} f = 0$ (om f har primitiv på G).

Sats: Om $\int_{\gamma} f = 0 \quad \forall$ slutna $\gamma \subset G$

så finns primitiv till F på G .

(där $F(z) := \int_{\gamma_z} f$ där γ_z är godtycklig

(noll). kurva mellan $z_0 \in G$ och z .

^{Ex:}
Polygoner. Sats: f (analytisk) $\neq$ holomorf på

området G och $\gamma_1 \sim_a \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Följd: f holomorf, $\gamma \sim_a 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f = 0$.
 $\uparrow$
 γ kontinuerlig.

(5)

Cauchy's integral formula: $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(w,r)} \frac{f(z)}{z-w} dz$

Följd $f = u + iv$ holomorf $\Rightarrow$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + Re^{i\theta}) d\theta$$

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + Re^{i\theta}) d\theta$$

$$v(w) = \dots$$

Cauchy ++: f holomorf på öppen G , $\gamma \subset G$

positivt orienterad, enkel, slutet, styckvis glatt och w inuti γ , $\gamma \rightsquigarrow 0$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Följande Cauchy: $f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$

$$f''(w) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz$$

etc

Idé: ~~derivatan~~ inte bryt $\frac{d}{dz}$ och $\int$.

Sarkis (Morera) f kont på öppen G och

$$\oint_{\gamma} f = 0 \quad \forall \text{ styckvis glatta slutna } \gamma \subset G$$

$\Rightarrow f$ holomorf.

Följd: G enkelt-sammanhängande öppen, $\oint_{\gamma} f = 0$ $\forall$ slutna $\gamma \subset G$

⑥

Enligt Liouville: f holomorf på $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists$ gränslin $f(z) \rightarrow L$ på $\mathbb{C}$.

Följande (Alg. fund. sats): $f(z)$ polynom (ej konstant) $\Rightarrow \exists z : f(z) = 0$.

Idea: $f \neq 0 \Rightarrow 1/f$ holomorf $\Rightarrow$

$$\oint_{C(0, R)} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, R)} \frac{1}{P(z)} \cdot \frac{1}{z} dz \rightarrow 0 \text{ då } R \rightarrow \infty.$$

Följande (Liouville): f helt begränsad

$\Rightarrow f$ konstant. (helt $:= ?$)

$$\text{Idea: } |f'(w)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(w, R)} \frac{f(z)}{(w-z)^2} dz \right| \rightarrow 0 \text{ då } R \rightarrow \infty.$$

Harmoniska funktioner: $f = u + iv$ holomorf

$\Rightarrow u, v$ harmoniska.

Sats: u harmonisk på enkelt sammanhängande

område $G \Rightarrow \exists$ harmonisk v så

att $f = u + iv$ holomorf.

$$\text{Anm: } v(x, y) := \int_0^y u_x(x, t) dt - \int_0^x u_y(t, 0) dt + \text{konst.}$$

(7)

Följd: u harmonisk $\Rightarrow u$ oändligt
deriverbar.

Icke: "lyft" u till v s.a. $f = u + iv$
holomorf; f oändligt
deriverbar.

Medelvärdessatzen: u harmonisk $\Rightarrow$

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{i\theta}) d\theta.$$

Följd: u harmonisk $\Rightarrow u$ har inga

stationära värden min/max. (min/max
är inte på randen
om u är konstant).

ut 25 —

Följd: u harmonisk på en begränsad område G

$$\Rightarrow u(z) = 0 \quad \forall z \in G \quad \text{om} \quad u(z) = 0 \quad \forall z \in \partial G.$$

Följd: u, v harmoniska på begr. G och

$$u(z) = v(z) \quad \forall z \in \partial G \Rightarrow u = v \quad \text{på } G.$$

Potensserier:

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen $\Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)$
konvergen (def).

Prop: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0.$$

⑧

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent,

Def $f_n \rightarrow f$ punktvis om...

$f_n \rightarrow f$ likförmigt om...

(Likförmigt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ så att $\forall z \in G$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad \text{~~och~~ } z \in G.)$$

Prop: f_n kontinuerliga och $f_n \rightarrow f$

likförmigt $\Rightarrow f$ kontinuerlig.

Prop: $f_n \rightarrow f$ likförmigt på G , $z \in G$

$$\Rightarrow \int_G f_n \rightarrow \int_G f.$$

Prop: Om $|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in G$

och $\sum M_n$ konverger $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

konvergera likförmigt.

(9)

Konvergenssätt för potensserier.

Def: $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ sägs vara

potensserie centrerad vid z_0 .

Sats Givet potensserie $\exists R \geq 0$ (eller $R = \infty$)
så att

a) $\sum$ konvergerar absolut för $|z - z_0| < R$

$\Rightarrow \sum$ konvergerar — c_n — och värdet

är för $|z - z_0| < r$, om $r < R$.

c) $\sum$ divergerar om $|z - z_0| > R$.

R sägs vara Seriens konvergenzradie.

Följd: $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ är kontinuerlig

på $D[z_0, R]$.

Följd: Om $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ har konvergenzradie R och $z \in D[z_0, R)$ så är

$$(*) \quad \int_z \left(\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n \int_z (z - z_0)^n$$

Anm: z slutet $\Rightarrow (*) = 0$.

(10)

Taylor/Laurent series

Sats: $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$ med konv. radie R

$\Rightarrow f$ holomorf på $D[z_0, R]$.

Ide: Maclaurin.

Sats: f har konv. radie R

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{k \geq 0} c_k \cdot k (z - z_0)^{k-1}$$

med konv. radie R .

Ide: Cauchys formel för f' . (+ $\int (\sum c_k z^k) = \sum c_k \int z^k$)

Följd: Om $f(z) = \sum c_k (z - z_0)^k$ har konv. radie

$$R > 0 \text{ så är } c_k = f^{(k)}(z_0)/k!$$

Ide: avledda serier för $f' \Rightarrow$ serier för f'' etc.

Sats: f holomorf på $D[z_0, R] \Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

där $r < R$.

$$\text{Ide: } \frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - z/w} = \frac{1}{w} \left(\sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{w} \right)^k \right).$$

Följd: $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf, $D(z_0, r) \subset G$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \text{ med konv. radie} \\ \geq R.$$

$$\text{Följd: } f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(w, r)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz.$$

Följd: f holomorf på $D(w, R)$ och

$$|f(z)| \leq M \Rightarrow |f^{(n)}(w)| \leq \frac{n! M}{R^n}.$$

Def: Om $f(z) = \sum c_n (z - z_0)^n$ har

pos. konv. radie sägs f vara analytisk vid z_0 .

Sats: f holomorf $\Leftrightarrow f$ analytisk.

Nullställen .. $\checkmark$ ^{holomorf} $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, G område.

Antag att $f(a) = 0$. Då gäller andryes

$$g \quad f(z) = 0 \quad \forall z \in G$$

$$\text{b, } f(z) = (z-a)^n g(z), \quad n \in \mathbb{N}, g(a) \neq 0 \\ g \text{ holomorf.}$$

(12) Ide: titta på potensserier. ($u = \text{mörka } h$
så att $c_k \neq 0$).

Sats: f holomorf på område G ,

$$a_n \rightarrow a \in G \text{ och } f(a_n) = 0$$

(~~en distinkt~~). ($a_n \neq a \forall n$).

$$\Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in G.$$

Sats: f holomorf och ej konstant på

område $G \Rightarrow |f|$ antar ej

svagt relativt maximum på G .

~~Följd~~ $\Downarrow (|f(z)| \leq |f(w)| \quad \forall z \in D(w, r)).$

Följd: f holomorf på begränsat

område G , kontinuerlig på $\bar{G}$

$$\Rightarrow \sup_{z \in G} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

"Max antas på randen",

~~Följd~~ Följd: u ej konstant, harmonisk på

område $G \Rightarrow u$ har inga svaga

relativa min/max på G .

(13)

Laurentserie: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k$.

(Konvergenz um $\sum_{k \leq 0}$ & $\sum_{k \geq 1}$ beide konvergieren).

Serien konvergieren $\dot{A}$ ring (annulus)

$$A := \{ z : R_1 < |z - z_0| < R_2 \},$$

Satz: f holomorph $\dot{p}_0 A$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

(dör $R_1 < r < R_2$)

$$\text{Idem: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$



Följd: Laurentserien är unika.

Följd: G område, $z_0 \in G$, f holomorph

$\dot{p}_0 G - \{z_0\} \Rightarrow f$ har Laurentserie

som konvergerar för $0 < |z - z_0| < R$

dör $R \geq d(z_0, \partial G)$.

(14)

Följd: f holomorf på $A = \{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$

med Laurentserie $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$

och γ är "snäll" kurva $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \underset{\uparrow}{c_{-1}}.$$

Singulariteter: $D[z_0, r] := \{z: 0 < |z - z_0| < r\}$

Def: f holomorf på $D[z_0, R]$

(men ej på $D[z_0, R]$) sägs ha en

isolerad singularitet vid z_0 .

3 typer

a) härbar om $\exists$ holomorf g på $D[z_0, R]$ så att
 $g(z) = f(z) \quad \forall z \in D[z_0, R]$

b) pol om $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$

c) essentiell om varken a) eller b).

Prop: z_0 härbar $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

z_0 pol $\Leftrightarrow$ ej härbar, och $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = 0$

för något positivt heltal n
~~(poängsordning?)~~

(15)

Följd: f holomorf på $D(z_0, R)$.

f har pol vid $z_0 \iff$

$\exists$ heltal $m > 0$ och holomorf g ,
med $g(z_0) \neq 0$ så att

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

m : polens order

Sats Om f har essentiell singularitet

vid z_0 så är bilden (under f) av

godtyckligt små punkterade diskar

täta i $\mathbb{C}$.

Sats: ~~$f(z)$~~ Om $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z-z_0)^k$

har isolerad sing. vid z_0 så:

a) z_0 härbar $\iff c_k = 0 \quad \forall k < 0$

b) z_0 pol $\iff c_N \neq 0$ för $N < 0$
och $c_k = 0 \quad \forall k < N$.

c) z_0 ess. sing. $\iff c_k \neq 0$

för oändligt antal
negativa k .

16

Residuen: $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i C_{-1}$,

$$\text{om } f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k.$$

$$C_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} (f(z)) = \operatorname{Res} (f(z), z=z_0).$$

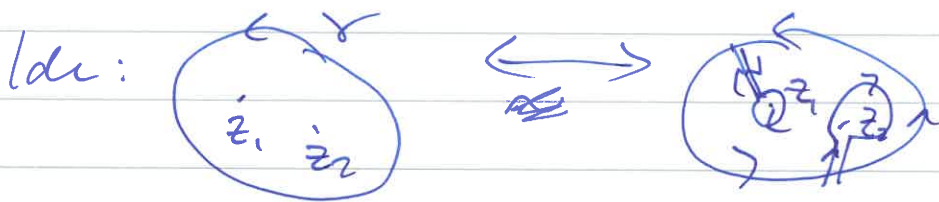
Satz Lit f vom holomorph $\overset{\text{område}}{\text{på}} A$,

bortsett från isolerade singulariteter

$z_1, z_2, \dots, z_n$ (ändligt antal!)

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z=z_k)$$

om γ är "snäll"...



Prop: z_0 hörbar $\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$

h/ z_0 pol av ordning n

$$\Rightarrow \operatorname{Res} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)) \right)$$

Prop: f, g holomorfa vid z_0 ,
 g enkelt nollställe vid z_0

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Argument principen

- * f'/f är kogarithmen derivata av f .
- * f meromorf på området G
om f holomorf ~~kan~~ bortsett
från poler.

Sats (Arg. princip) f meromorf på
området G , $\gamma \subset G$ "små" $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = Z(f, \gamma) - P(f, \gamma)$$

der : $Z(f, \gamma)$ = antal nollställen till f
inuti γ
 $P(f, \gamma)$ = antal poler — " — .

Sats (Rouche): f, g holomorfa på område

G , $\gamma \subset G$ "små",

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \gamma \Rightarrow$$

$$Z(f+g, \gamma) = Z(f, \gamma).$$