Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 23 oktober 2017 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang. Lycka till!

1. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 1, \\ x_2' = x_1. \end{cases}$$

Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Det karakteristiska polynomet $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ har rötterna $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, med motsvarande egenvektorer

$$k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Med

$$\overline{b}_1 = \Re(k_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{b}_2 = \Im(k_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ges en fundamental lösningsmängd av $\overline{x}_1 = \overline{b}_1 \cos t - \overline{b}_2 \sin t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ och $\overline{x}_2 = \overline{b}_2 \cos t + \overline{b}_1 \sin t = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

För att hitta en partikulärlösning $\overline{x}_p$ gör vi ansatsen $\overline{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (med a, b konstanter); då $\overline{x}_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ måste vi välja $\overline{x}_p$ så att $A\overline{x}_p = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och vi får $\overline{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (4p) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

där

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi/2 \\ \sin(2t), & t \geq \pi/2. \end{cases}$$

Lösning: Låt $U(t)$ beteckna Heavisidefunktionen. Vi kan skriva $f(t)$ some $f(t) = U(t - \pi/2) \sin 2t$.

Låt $Y(s), F(s)$ vara Laplacetransformen av $y(t)$ respektive $f(t)$. Formelbladet ger

$$\mathcal{L}(U(t - \pi/2) \sin 2t) = -\mathcal{L}(U(t - \pi/2) \sin 2(t - \pi/2) = -e^{-\pi s/2} \frac{2}{s^2 + 4}$$

Laplacetransformering av ekvationen ger då

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = -e^{-\pi s/2}\frac{2}{s^2+4}$$

som ger att $(s^2+16)Y(s) = s - e^{-\pi s/2}\frac{2}{s^2+4}$ och vi ser att

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s/2}\frac{2}{(s^2+4)(s^2+16)}$$

Eftersom

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+16)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+16}\right)$$

ger formelbladet att

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$$

och

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+16)}\right\} = \frac{1}{24}\sin 2t - \frac{1}{48}\sin 4t$$

vilket ger att

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s/2}\frac{2}{(s^2+4)(s^2+16)}\right\} = \left(\frac{1}{12}\sin 2(t-\pi/2) - \frac{1}{24}\sin 4(t-\pi/2)\right)U(t-\pi/2)$$

$$= \left(-\frac{1}{12}\sin 2t - \frac{1}{24}\sin 4t\right)U(t-\pi/2)$$

Sammanfattningsvis får vi att

$$y(t) = \begin{cases} \cos 4t & \text{om } 0 \le t < \pi/2, \\ \cos 4t + \frac{1}{12}\sin 2t + \frac{1}{24}\sin 4t & \text{om } t \ge \pi/2. \end{cases}$$

3. Låt $f(t)$ vara den *udda* 2π-periodiska funktion som på intervallet $[0,\pi)$ ges av $f(t) = t^2$.

   (a) (1p) Konvergerar Fourierserien till $f(t)$ i punkterna $t=\pi$ och $t=\frac{3\pi}{2}$? I så fall till vad? Motivera.

   Eftersom f är styckvist glatt konvergerar Fourierserien, i en punkt a, till

   $$(\lim_{t\to a-} f(t) + \lim_{t\to a+} f(t))/2.$$

   Då $\lim_{t\to\pi+} f(t) = \lim_{t\to(-\pi)+} f(t) = -\pi^2$ och $\lim_{t\to\pi-} f(t) = \pi^2$ ser vi att Fourierserien konvergerar till 0 i punkten $t=\pi$.

   Eftersom $f(3\pi/2) = f(-\pi/2) = -\pi^2/4$ och f är kontinuerlig i $(-\pi,\pi)$ ser vi att Fourierserien konvergerar till $-\pi^2/4$ i punkten $t = 3\pi/2$.

   (b) (1p) Skissa grafen till f på intervallet $(-\pi, 3\pi)$.

   ??

(c) (2p) Beräkna Fourierserien till f.
Eftersom f är udda blir $a_n = 0$ för all n.
Igen då f är udda får vi

$$b_n = 2/\pi \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt = 2/\pi \int_0^\pi t^2 \sin(nt)\,dt$$

Enligt tabell är $\int t^2 \sin(nt)\,dt = \frac{2-n^2t^2}{n^3}\cos(nt) + \frac{2t\sin(nt)}{n^2}$ och då $\cos(n\pi) = (-1)^n$ får vi att

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2-n^2\pi^2}{n^3}\cdot(-1)^n - 2/n^3\right).$$

4. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält. (De blå linjerna är pilskaft, de svarta punkterna är pilspetsar.) **Anm.:** det räcker att räkna ut egenvärdena.

1. $\vec{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}$
2. $\vec{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}$
3. $\vec{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}$
4. $\vec{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}$

Egenvärden för de fyra olika matriserna ges av **??**, **??**, **??** samt **??**

Eftersom expansion/kontraktion avläses mha egenvärdenas realdel bör vi para ihop enligt följande: $1 \to B$, $2 \to D$, $3 \to C$ samt $4 \to A$.

5. (4p) Bestäm alla kritiska punkter till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 \end{cases}$$

och klassificera dem (om möjligt) m.a.p. stabilitet.

Vi bestämmer först de kritiska punkterna genom att lösa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 = 0 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 = 0, \end{cases}$$

som ger att $x = y^2, y^6 - y = 0$, dvs $y(y^5 - 1) = 0$ vilket implicerar att $y = 0$ eller $y = 1$. Vi ser att $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (1, 1)$ är de enda kritiska punkterna.

Med $P(x, y) = -y + x^3$, $Q(x, y) = x - y^2$ får vi Jacobimatrisen

$$J = \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix},$$

och $(0, 0)$ ger då matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdena $\pm i$. Eftersom realdelen av i är noll kan vi inte med den sats vi har avgöra huruvida $(0,0)$ är stabil eller inte.

Jacobimatrisen för $(1,1)$ blir $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Eftersom determinanten är -5 är egenvärdena reella, och av olika tecken — således är $(1,1)$ en instabil kritisk punkt.

6. Givet en konstant $c \geq 1$, betrakta den autonoma differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + c, \quad y(0) = 0.$$

(a) (2p) Antag att $c = 1$. Visa att $y(t) \to \infty$ inom ändlig tid, dvs att

$$\lim_{t \to t_1-} y(t) = \infty$$

för något $t_1 > 0$.

(b) (2p) Antag att $c > 1$. Eftersom vi då får att $y^2 + c > y^2 + 1$ borde $y(t)$ växa snabbare än i del (a). Visa att denna intuition är korrekt, dvs att det finns $t_c < t_0$ så att

$$\lim_{t \to t_c-} y(t) = \infty$$

Ekvationen är separabel, och integration av

$$\frac{dy}{y^2 + c} = dt$$

ger

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \arctan(y/\sqrt{c}) = t + c_1$$

och således är

$$y = \sqrt{c} \tan(\sqrt{c}t + c_2)$$

och $y(0) = 0$ ger att $c_2 = 0$.

För $c = 1$ får vi $y(t) = \tan(t)$, och $y(t) \to \infty$ då $t \to (\pi/2)-$, dvs vi kan ta $t_1 = \pi/2$.

För $c > 1$ ser vi att $y(t) \to \infty$ då $\sqrt{c}t \to (\pi/2)-$, dvs då $t \to t_c-$ med $t_c = \pi/(2\sqrt{c})$. Eftersom $c > 1$ ser vi att $t_c < t_1$.

7. (4p) Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0,$$

samt

$$u(x,0) = 1 + \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Vi gör ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Differentialekvationen ger då

$$XT' = 5X''T$$

som vi skriver om som
$$T'/T = 5X''/X = \lambda$$
för någon konstant λ.

Randvillkoren för $x = 0$ samt $x = 1$ ger att $X'(0) = X'(1) = 0$ (notera att $T \equiv 0$ bara ger trivial lösning). Differentialekvationen

$$X'' - \frac{\lambda}{5}X = 0, \quad X'(0) = X'(1) = 0$$

har bara trivial lösning om $\lambda > 0$. Skriv nu $\lambda/5 = -\alpha^2$ för något $\alpha \geq 0$; lösningarna ges då av
$$X = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x).$$
Fallet $\alpha = 0$ ger konstant lösning, vi antar nu att $\alpha > 0$. Då

$$X' = \alpha(-c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$$

ger $X'(0) = 0$ att $c_2 = 0$. Vidare ger $X'(1) = 0$ att $c_1 \sin(\alpha) = 0$ och för icketriviala lösningar måste därför $c_1 \neq 0$ och $\sin(\alpha) = 0$, dvs $\alpha = \pi \cdot n$ för $n = 1, 2, \ldots$. Vi noterar att $\alpha = 0$ fås genom att ta $n = 0$ i föregånde diskussion, och att $\alpha = \pi \cdot n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ gäller om $\alpha \geq 0$. Sammanfattningsvis får vi att

$$X(x) = c_1 \cos(\pi n x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

och $\lambda = -5\alpha^2 = -5\pi^2 n^2$.

Vi får nu enkelt att lösningarna till $T' - \lambda T = 0$ ges av

$$T = c_3 e^{\lambda t} = c_3 e^{-5(\pi n)^2 t}$$

och således satisfierar
$$u_n(x,t) = \cos(\pi n x) \cdot e^{-5(\pi n)^2 t}$$
differentialekvationen samt Neumann-randvärdena.

Vi gör sedan ansatsen
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x,t)$$
och söker a_n så att randvärdet $u(x,0) = 1 + \cos(\pi x)$ är uppfyllt. Vi ser nu att

$$u(x,t) = 1 + \cos(\pi x) \cdot e^{-5\pi^2 t}$$

ger en lösning.

8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

(a) (2p) Bestäm två olika lösningar till begynnelsevärdesproblemet.

(b) (2p) Visa att begynnelsevärdesproblemet har oändligt många lösningar.

Ekvationen är separabel och integration av $dy/\sqrt{y} = dt$ ger $2\sqrt{y} = t + c$; randvillkoret $y(0) = 0$ ger sedan att $c = 0$. En lösning ges alltså av

$$y_1(t) = t^2/4.$$

Vi ser att även $y_2 \equiv 0$ är en lösning.

Vi kan nu kombinera lösningarna i del (a) på följande sätt: givet $a > 0$, låt

$$y_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t \leq a, \\ (t-a)^2/4 & \text{för } t > a. \end{cases}$$

Begynnelsevärdesproblemet har alltså oändligt (ouppräkneligt) många lösningar.