

Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 17 december 2018 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg, 08-7906582.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

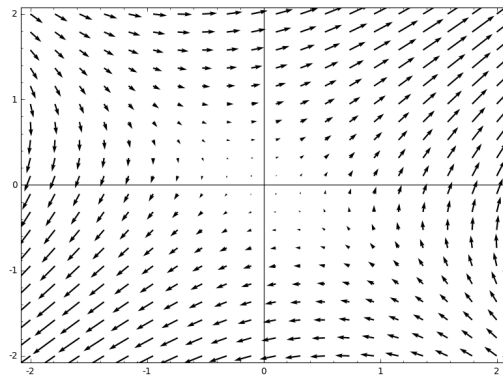
1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält (du behöver inte motivera svaret.) **Anm:** egenvärdena ger en hel del information.

1.  $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$

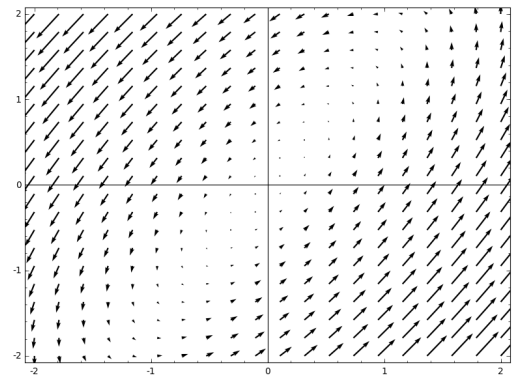
2.  $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$

3.  $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

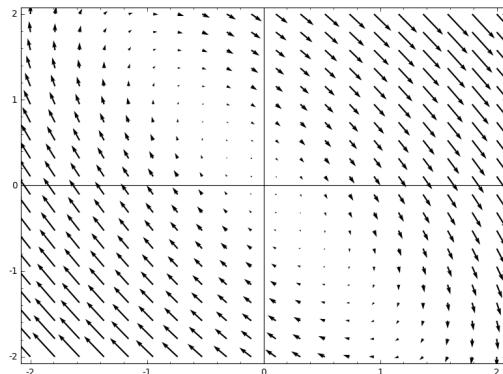
4.  $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}$



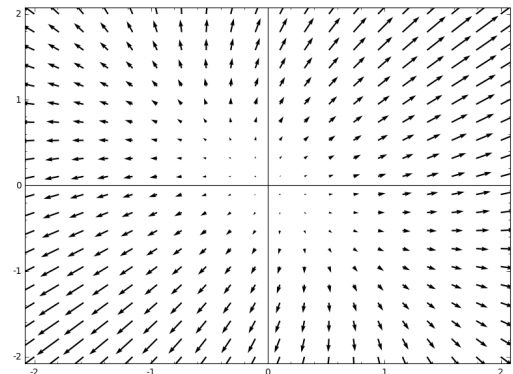
A



B



C



D

---

1B, 2C, 3A, 4D.

---

2. (4p) Låt  $\mathcal{U}(t)$  beteckna Heavisides stegfunktion. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = \mathcal{U}(t - 2) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

genom att använda Laplacetransformer.

---

Laplacetransformering (mha tabell) ger

$$s^2Y - 3 + 2sY + 5Y = e^{-2s}/s$$

och vi får

$$Y = \frac{3 + e^{-2s}/s}{(s^2 + 2s + 5)}$$

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5s} - \frac{1}{5} \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

Tabell ger nu:

$$L^{-1}(1/(s^2 + 2s + 5)) = 1/2e^{-t} \sin(2t)$$

$$L^{-1}(1/s) = 1, \quad L^{-1}\left(\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}\right) = e^{-t} \cos 2t + (1/2)e^{-t} \sin 2t;$$

translationsregeln samt linjäritet ger nu

$$y(t) = (3/2)e^{-t} \sin 2t + \frac{U(t - 2)}{5} (1 - (e^{-(t-2)}) \cos 2(t - 2) + (1/2)e^{-(t-2)} \sin 2(t - 2))$$

eller

$$y(t) = \begin{cases} (3/2)e^{-t} \sin 2t & 0 \leq t < 2, \\ (3/2)e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{5}(1 - (e^{2-t}) \cos(2t - 4) + (1/2)e^{2-t} \sin(2t - 4)) & t \geq 2. \end{cases}$$

---

3. Flervalsfrågor (du behöver inte motivera dina svar):

(a) (2p) Hur många jämviktslösningar (dvs, konstanta lösningar) har det autonoma systemet

$$\frac{dy}{dx} = y^2(2y - 3)(y + 3)^2e^{2y-5}$$

- i. 1,
- ii. 2,
- iii. 3,
- iv. 4,
- v. 5.

---

a: 3st. b:  $\{e^t \cos t, e^t \sin t\}$ .

---

(b) (2p) Vilket av följande alternativ är en fundamental lösningsmängd till systemet

$$y'' - 2y' + 2y = 0 :$$

- i.  $\{te^t, e^t\}$ ,
- ii.  $\{e^t \cos t, e^t \sin t\}$ ,
- iii.  $\{\cos t, \sin t\}$ ,
- iv.  $\{t \cos t, t \sin t\}$ ,
- v.  $\{e^t \cos t + e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t + e^t \sin t\}$ .

4. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \tag{1}$$

- (2p) Bestäm en fundamental lösningsmängd till (1).
- (2p) Finn den allmänna lösningen till (1).

---

Med  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ser vi att  $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ , dvs en dubbelrot. Gausseliminering ger att lösningsrummet till  $(A - \lambda I)v = 0$  har dimension ett, och spänns upp av  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Gausselimination ger nu att  $(A - I)w = v$  har lösningen  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

En fundamental lösningsmängd ges av vektorerna

$$x_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = te^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Den allmänna lösningen är då på formen

$$C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 (te^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(där  $C_1, C_2$  är konstanter.)

---

5. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$xy' + y = x^2 y^2, \quad y(1) = 1$$

samt ange existensintervallet för lösningen.

---

Substitutionen  $y = y^{1-2} = 1/y$  ger  $y' = (-1/u^2)u'$  leder till ekvationen

$$-xu'/u^2 + 1/u = x^2/u^2$$

---

som kan skrivas om som

$$u' + (-1/x)u = -x$$

Integrerande faktor ges av  $e^{\int -1/x dx} = e^{-\ln x} = 1/x$ ; multiplikation med denna ger ekvationen

$$(u/x)' = -1$$

som leder ger att

$$u = x(c - x) = cx - x^2$$

och således  $y = 1/u = 1/(cx - x^2)$ . Begynnelsevillkoret  $y(1) = 1$  ger nu  $c = 2$ , och vi får att

$$y(x) = \frac{1}{2x - x^2}.$$

Funktionen har singulariteter i  $x = 0$  samt  $x = 2$  och vi ser att existensintervallet ges av  $I = (0, 2)$ .

---

6. (4p) Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad t > 0,$$

samt

$$u(x, 0) = 2 \cos(3\pi x) + 4 \cos(5\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

---

Ansatsen  $u(x, t) = X(x)T(t)$  ger  $XT = 3X''T$  som leder till

$$T'/(3T) = X''/X = -\lambda, \quad \lambda \text{ konstant.}$$

Vi ser att  $T' + 3\lambda T = 0$  har lösningen  $T(t) = ce^{-3\lambda t}$ .

För lösningar till  $X'' + \lambda X$  delar vi upp i fall.

- $\lambda = 0$  ger  $X'' = 0$ , dvs  $X = ax + b$ . Randvillkoren för  $x = 0$  och  $x = 1$  ger att  $a = 0$ , och vi får den konstanta lösningen  $X(x) = b$ .
- $\lambda < 0$ : vi skriver  $\lambda = -\alpha^2$  och får ekvationen  $X'' - \alpha^2 X = 0$  som har allmän lösning på formen  $X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$ , och  $X' = \alpha(c_1 e^{\alpha x} - c_2 e^{-\alpha x})$ . Randvillkor för  $x = 0, 1$  ger nu  $\alpha(c_1 - c_2) = 0$  samt  $\alpha(c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha}) = 0$  och vi ser att enda möjligheten är  $\alpha = 0$  eller  $c_1 = c_2 = 0$  (eftersom  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\alpha} & e^{-\alpha} \end{vmatrix} \neq 0$ ), dvs ingen icketrivial lösning.
- $\lambda > 0$ : med  $\lambda = \alpha^2$  får vi ekvationen  $X'' + \alpha^2 X = 0$  som har allmän lösning på formen

$$X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

och  $X' = \alpha(-c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x)$ ; randvillkor för  $x = 0$  ger  $X'(0) = 0$  och således  $c_2 = 0$ . Om  $c_1 \neq 0$  ger randvillkoret för  $x = 1$  att  $\sin \alpha x = 0$ , dvs  $\alpha = \pi n$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ , som i sin tur ger att  $\lambda = \alpha^2 = \pi^2 n^2$ .

---

Vi ser att  $u_n(x, t) = e^{-3\pi^2 n^2 t} \cos \pi n x$  satisfierar alla ekvationer förutom det sista randvillkoret.

För att det sista randvillkoret skall vara uppfyllt låter vi

$$u(x, t) = 2e^{-3\pi^2 3^2 t} \cos 3\pi x + 4e^{-3\pi^2 5^2 t} \cos 5\pi x = 2e^{-27\pi^2 t} \cos 3\pi x + 4e^{-75\pi^2 t} \cos 5\pi x.$$

7. (4p) En anharmonisk svängning beskrivs av ekvationen

$$x'' + x' + 2x - x^3 = 0,$$

där  $x = x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Skriv denna ekvation som ett system. Finns det någon stabil kritisk punkt till detta system? Vilken typ av kritisk punkt är det i så fall?

---

Med  $y = x'$  får vi systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - 2x - y \end{cases}$$

Ekvationerna för stationära punkter, dvs  $x' = y' = 0$ , blir då  $y = 0$  samt  $x^3 - 2x - 0 = 0$ , dvs  $y = 0$  samt  $x = 0, \pm 2^{1/2}$ , dvs punkterna

$$(0, 0), \quad (0, \sqrt{2}), \quad (0, -\sqrt{2})$$

Jacobianen ges av  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 2 & -1 \end{pmatrix}$ ; insättning i de olika punkterna ger Jacobianerna

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Då  $\det(J_2) = \det(J_3) = -4$  ser vi att varken  $(0, \sqrt{2})$  eller  $(0, -\sqrt{2})$  eller kan vara stabil (något av egenvärdena måste vara positivt).

Det karakteristiska polynomet för  $J_1$  är  $\lambda^2 + \lambda - 4$  som har rötterna  $-1/2 \pm \sqrt{1/4 - 4}$  som båda har realdel  $-1/2$ . Således är  $(0, 0)$  en asymptotiskt stabil (spiral) punkt.

---

8. (4p) Låt den  $2\pi$ -periodiska funktionen  $f$  ges av

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi$$

- (a) Utveckla  $f$  i en Fourierserie.
- 

$f(x) = x^2$  på  $(-\pi, \pi)$  ger

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^2/3.$$

Då  $x^2$  är jämn får vi  $b_n = 0$  för alla  $n$ .

Vi ser nu att

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

---

(mha integraltabell)

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2x \cos nx}{n^2} + \frac{n^2 x^2 - 2}{n^3} \sin nx \right]_0^\pi = \frac{4}{n^2} \cos \pi n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Alltså får vi

$$x^2 \sim \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

---

(b) Använd Fourierserien för att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

---

Eftersom  $f$  är styckvist kontinuerligt deriverbar, samt kontinuerlig i punkten  $x = \pi$  får vi

$$\pi^2 = f(\pi) = 2\pi^2/6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

som ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (1/4)(\pi^2 - \pi^2/3) = \pi^2/6.$$

---