Lösningsförslag till Tentamen, SF1633, Differentialekvationer I den 24 oktober 2016 kl 8:00 - 13:00.

För godkänt (betyg E) krävs tre godkända moduler från del I. Varje moduluppgift består av tre frågor. För att bli godkänd på modulen krävs rätt svar på minst två av dessa frågor. Den som har godkänd modul från lappskrivning behöver inte göra motsvarande moduluppgift nedan. Den som har två godkända moduler, från lappskrivning eller tentamen, har möjlighet att komplettera.

Del II är avsedd för högre betyg. Varje uppgift i del II ger maximalt 4 poäng. För betyg A (respektive B, C, D) krävs 3 godkända moduler samt 15 (respektive 11, 7, 3) poäng på del II.

Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA: Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt. Samtliga svar ska vara på reell form.

Del I

Modul 1. Betrakta differentialekvationen

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 3 = 0, \quad x > 0.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen (på intervallet $x > 0$).

b) Finn den lösning som uppfyller begynnelsvillkoret $y(1) = 2$. Verifiera, genom insättning i differentialekvationen, att denna lösning verkligen är en lösning.

c) Finns det ett värde y_0 så att lösningen som uppfyller $y(1) = y_0$ också uppfyller $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$? Bestäm i så fall ett sådant värde på y_0.

Lösning: a) Vi har en linjär ekvation. På standardform kan den skrivas

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{3}{x^2}.$$

Den integrerande faktorn är $e^{\int(-2/x)dx} = 1/x^2$. Om vi multiplicerar ekvationen med den integrernade faktorn kan ekvationen skrivas

$$\frac{d}{dx}(y/x^2) = -\frac{3}{x^4}$$

Integreras detta fås

$$y/x^2 = C + 1/x^3$$

vilket ger svaret $y = Cx^2 + 1/x$, där C är en godtycklig konstant.

b) Begynnelsevillkoret ger $2 = y(1) = C + 1$, dvs $C = 1$. Således är $y = x^2 + 1/x$ den sökta lösningen. Vi verifierar att detta verkligen är en lösning till ekvationen. Vi har $y' = 2x - 1/x^2$ så

$$x^2y' - 2xy = (2x^3 - 1) - 2x(x^2 + 1/x) = -3.$$

Alltså, det är verkligen en lösning till ekvationen.

c) Lösningarna ges av $y = Cx^2 + 1/x$. För att vi ska kunna ha $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ måste alltså $C = 0$, dvs vi har $y = 1/x$. Då är $y(1) = 1$, dvs $y_0 = 1$.

Modul 2. a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$$

där $x = x(t)$ och $y = y(t)$. (Tips: verifiera att lösningen är korrekt.)
b) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y - 2e^t. \end{aligned}$$

c) Bestäm den lösning till systemet i b) som uppfyller $x(0) = 0, y(0) = 0$. Verifiera också, genom insättning, att svaret verkligen är en lösning till systemet.

Lösning: a) Vi låter

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då kan systemet skrivas $X' = AX$. Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -1$, med motsvarande egenvektorer $v_1 = \binom{1}{1}$ och $v_2 = \binom{1}{-1}$. Således vet vi från teorin att den allmänna lösningen till ekvationen ges av

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

b) Det inhomogena systemet kan skrivas

$$X' = AX + G(t), \text{ där } G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix}.$$

Vi söker en partikulärlösning X_p, och använder oss av variation av parametrar. Från a) får vi att

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

är en fundamentalmatris till det homogena systemet $X' = AX$. Vi söker därför en lösning X_p till det inhomogena systemet på formen $X_P = \Phi(t)U(t)$. Från teorin vet vi att detta är en lösning om $U'(t) = \Phi^{-1}(t)G(t)$. Vi har

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}$$

så

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)G(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Detta ger att

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}/2 + a \\ e^{2t}/2 + b \end{pmatrix}$$

där a, b är konstanter. Varje val av a, b fungerar, så vi väljer $a = b = 0$. Således är

$$X_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} e^{-2t}/2 \\ e^{2t}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är därför

$$X(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}.$$

c) Begynnelsevillkoret ger oss systemet

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = X(0) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Detta ger oss $c_1 = c_2 = -1/2$. Alltså, den sökta lösningen är

$$X(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{3t}/2 - e^{-t}/2 + e^t\\ -e^{3t}/2 + e^{-t}/2\end{pmatrix}.$$

Vi verifierar att detta vekligen är en lösning. Vi har

$$X'(t) = \begin{pmatrix}-3e^{3t}/2 + e^{-t}/2 + e^t\\ -3e^{3t}/2 - e^{-t}/2\end{pmatrix}$$

och

$$AX(t) = \begin{pmatrix}-3e^{3t}/2 + e^{-t}/2 + e^t\\ -3e^{3t}/2 - e^{-t}/2\end{pmatrix}.$$

Alltså, $X' = AX$, dvs X är en lösning. Vi noterar också att $X(0) = \binom{0}{0}$, så begynnelsevillkoren är också uppfyllda.

Modul 3. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1\\ t, & t \geq 1.\end{cases}$$

a) Bestäm Laplacetransformen $F(s)$ till $f(t)$.

b) Bestäm $Y(s)$ om $y' + y = f(t), y(0) = 1$.

c) Bestäm $y(t)$.

Lösning: a) Vi kan skriva $f(t) = u(t-1)t$ där $u(t)$ är Heavisides stegfunktion. Om vi låter $g(t) = t+1$ kan vi skriva $f(t) = u(t-1)g(t-1)$. Funktionen $g(t)$ ha Laplacetransformen $G(S) = 1/s^2 + 1/s$. Här har vi använt formleln L20 i Beta. Använder vi nu formel L4 fås att

$$F(s) = e^{-s}G(s) = e^{-s}(1/s^2 + 1/s) = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}.$$

b) Vi Laplacetransformerar ekvationen, och utnyttjar begynnelsevillkoret:

$$sY(s) - 1 + Y(s) = F(s)$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + e^{-s}\frac{s+1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

c) Eftersom $\mathcal{L}^{-1}(1/(s+1)) = e^{-t}$ (enligt L21) och $\mathcal{L}^{-1}(1/s^2) = t$ (enligt L20) så får vi, om vi utnyttjar L4, att

$$y(t) = e^{-t} + u(t-1)(t-1).$$

Del II

4. a) Visa att $y_1 = 1/x$ och $y_2 = (\ln x)/x$ är en fundamental lösningsmängd till ekvationen **(2p)**

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

b) Lös begynnelsevärdesproblemet **(2p)**

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

Lösning: a) För att verifiera att y_1 och y_2 är en fundamental lösningsmängd måste vi verifiera att de verkligen är lösningar, samt att de är linjärt oberoende.

Vi har $y_1' = -1/x^2$ och $y_1'' = 2/x^3$; och $y_2' = 1/x^2 - (\ln x)/x^2$ och $y_2'' = -3/x^3 + 2(\ln x)/x^3$. Således har vi

$$x^2y_1'' + 3xy' + y = 2/x - 3/x + 1/x = 0$$

och

$$x^2y_2'' + 3xy' + y = -3/x + 2(\ln x)/x + 3(1/x - (\ln x)/x) + (\ln x)/x = 0.$$

Alltså är y_1 och y_2 verkligen lösningar.

För att verifiera att de är linjärt oberoende använder vi Wronskideterminanten W. Vi vet att lösningarna är linjärt oberoende om och endast om $W(x) \neq 0$ på hela intervallet $x > 0$. Vi har

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/x & (\ln x)/x \\ -1/x^2 & 1/x^2 - (\ln x)/x^2 \end{vmatrix} = 1/x^3 \neq 0 \text{ för alla } x > 0.$$

Slutsatsen är alltså att y_1 och y_2 bildar en fundamental lösningsmängd.

b) Vi skriver ekvationen på standardform:

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^3}, \quad x > 0. \tag{1}$$

Låt

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}.$$

Vi behöver en partikulärlösning, och vi söker en med hjälp av variation av parametrar. Från teorin vet vi att

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

är en lösning om u_1, u_2 uppfyller (W är Wronskideterminanten från a))

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{(\ln x)^2}{x}$$

och

$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{\ln x}{x}.$$

Integrering ger att

$$u_1 = -(\ln x)^3/3 + a_1, \quad u_2 = (\ln x)^2/2 + a_2,$$

där a_1, a_2 är konstanter. Varje val av a_1, a_2 fungerar, så vi väljer $a_1 = a_2 = 0$.

Således är

$$y_p = -\frac{(\ln x)^3}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{(\ln x)^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^3}{6}$$

en partikulärlösning. Eftersom y_1, y_2 är en fundamental lösningsmängd till den motsvarnade homogena ekvationen, vet vi att den allmänna lösningen till (1) är

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 \ln x}{x} + \frac{(\ln x)^3}{6},$$

där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

Nu bestämmer vi c_1, c_2 så att begynnelsevillkoren är uppfyllda. Vi har

$$y' = -c_1/x^2 + c_2(1/x^2 - (\ln x)/x^2) + \frac{(\ln x)^2}{2x}.$$

Vi får

$$1 = y(1) = c_1, \quad 0 = y'(1) = -c_1 + c_2.$$

Således, $c_1 = 1$ och $c_2 = 1$. Detta betyder att

$$y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^3}{6},$$

är den sökta lösningen.

5. Bestäm konstanten a så att lösningen $y(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = 2\delta(t - \pi) + a\delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

uppfyller $y(t) = 0$ för alla $t > 3\pi$. Bestäm även denna lösning, samt skissa den. (Här är $\delta(t)$ Diracs deltafunktion.)

Lösning: Vi Laplacetransformerar bägge leden, och använder begynnelsevillkoren:

$$s^2 Y(s) + Y(s) = 2e^{-\pi s} + ae^{-3\pi s}.$$

Här har vi använt formel L15 i Beta (plus linjariteten hos Laplacetransformen). Detta ger

$$Y(s) = \frac{2e^{-\pi s}}{s^2 + 1} + \frac{ae^{-3\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Från L24 vet vi att $\mathcal{L}^{-1}(1/(s^2 + 1)) = \sin t$. Använder vi nu formel L4 får vi

$$y(t) = 2u(t - \pi) \sin(t - \pi) + au(t - 3\pi) \sin(t - 3\pi).$$

där $u(t)$ är Heavisides stegfunktion. För $t > 3\pi$ har vi, om vi utnyttjar att $\sin(t - \pi) = -\sin t$ och att $\sin t$ är 2π-periodisk,

$$y(t) = 2\sin(t - \pi) + a\sin(t - 3\pi) = -2\sin t - a\sin t.$$

För att detta ska vara noll måste vi alltså välja $a = -2$, dvs den sökta lösningen är

$$y(t) = 2u(t - \pi) \sin(t - \pi) - 2u(t - 3\pi) \sin(t - 3\pi) = 2(u(t - \pi) - u(t - 3\pi)) \sin(t - \pi).$$

Rita figur (grafen är $y = 0$ för $0 < t < \pi$, $y = \sin(t - \pi)$ för $\pi \leq t \leq 3\pi$, och $y = 0$ för $t > 3\pi$).

6. a) Utveckla $\cos x$ i en sinusserie i intervallet $[0,\pi]$. **(2p)**

b) Kan $\cos x$ utvecklas i en sinusserie i hela intervallet $[-\pi,\pi]$? **(1p)**

c) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(\pi k/2)}{4k^2-1}$ genom att utnyttja resultatet i a). **(1p)**

Lösning: a) För att utveckla $\cos x$ i en sinusserie i $[0,\pi]$ gör vi en udda utvidgning av $\cos x$ till intervallet $[-\pi,\pi]$ (tänk på att $\cos x$ är en jämn funktion). Låt

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & ,0<x<\pi\\ -\cos x & ,-\pi<x<0.\end{cases}$$

Eftersom f är udda kommer Fourierserien ges av

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

där

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin(nx)dx.$$

Vi får, om vi använder att $2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)dx=0.$$

Vidare, formel 225 på sid 169 i Beta ger att

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[-\left(\frac{\cos(n-1)x}{2(n-1)}+\frac{\cos(n+1)x}{2(n+1)}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n(\cos(n\pi)+1)}{n^2-1}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n((-1)^n+1)}{n^2-1}\right)$$

om $n\geq 2$. Här har vi utnyttjat att $\cos(x+\pi)=\cos(x-\pi)=-\cos x$ för alla x.

Vi ser att $b_n=0$ för alla udda n; och för $n=2k$ har vi $b_{2k}=\frac{8k}{\pi(4k^2-1)}$. Alltså, vi har

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

b) Nej. Eftersom $\sin t$ är en udda funktion kommer en sinusserie alltid vara udda. Funktionen $\cos x$ däremot är jämn. Alltså är det omöjligt att utveckla $\cos x$ i en sinusserie på hela $[-\pi,\pi]$.

c) Eftersom f och f' är styckvis kontinuerliga så vet vi att Fourierserien till f konvergerar mot $f(x)$ i varje punkt där f är kontinuerlig. Vi ser att f är kontinuerlig i punkten $x=\pi/4$. Alltså har vi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos(\pi/4)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(2k\pi/4)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(k\pi/2)$$

dvs

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(k\pi/2)=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

7. En svängande sträng av längd L kan beskrivas genom att ange utslaget $u(x,t)$ från jämviktsläget som funktion av läget x, $0 \leq x \leq L$, och tiden $t \geq 0$. Funktionen $u(x,t)$ satisfierar den endimensionella vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

där $c > 0$ är en parameter. Låt $L = 2$ och $c = 1$ i lämpliga enheter. Antag att strängen är fastsatt i ändpunkterna $x = 0$ och $x = 2$, och att den vid tiden $t = 0$ har ett utslag givet av

$$u(x,0) = 3\sin(\pi x) - 2\sin(3\pi x),\ \ 0 < x < 2.$$

Antag vidare att strängen är i vila vid tiden $t = 0$, dvs $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. Bestäm $u(x,t)$.

Lösning: Vi har vågekvationen ($c = 1$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Vi söker lösningar till denna ekvatione som uppfyller randvillkoret

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, t > 0$$

eftersom stängen är fastsatt i ändpunkterna. Vi söker lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i ekvationen ger, efter omskrivning,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

där λ är en konstant. Den sista likheten måste gälla eftersom uttrycken måste vara oberoende av både x och t. Detta ger oss de två ekvationerna

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0.$$

För att randvillkoren $u(0,t) = u(2,t) = 0, t > 0$, ska vara uppfyllda vill vi att $X(0) = X(2) = 0$. Detta ger oss randvärdesproblemet

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(2) = 0.$$

Vi söker icke-triviala lösningar till detta problem.

Om $\lambda \geq 0$ har randvärdesproblemet endast den triviala lösningnen $X(x) = 0$.

Antag att $\lambda > 0$ och låt $\omega > 0$ vara sådant att $\omega^2 = \lambda$. Ekvationen $X'' + \lambda X = 0$ har den allmänna lösningen $X(x) = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$. Villkoret $X(0) = 0$ ger $c_1 = 0$. Villkoret $X(2) = 0$ ger

$$c_2 \sin 2\omega = 0.$$

Vi får icke-triviala lösningar $X(x) = c_2 \sin\omega x$ (dvs c_2 kan vara godtycklig) precis då $\sin 2\omega = 0$. Detta händer precis då $2\omega = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (kom ihåg att vi antagit att $\omega > 0$), dvs då $\omega = n\pi/2$ (och alltså $\lambda = \omega^2 = n^2\pi^2/4$). Vi ser också att ekvationen $T'' + \lambda T = 0$ har den allmänna lösningen $T(t) = k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t$.

Slutsatsen är att för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$ och val av konstanter a_n, b_n så är

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x/2)(a_n \cos(n\pi t/2) + b_n \sin(n\pi t/2))$$

en lösning till den givna vågekvationen som också uppfyller $u_n(0,t) = u_n(2,t) = 0$.

Eftersom randvillkoren är homogena ($= 0$) så kan vi använda superposition för att dra slutsatsen att linjärkombinationer

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \sin(n\pi x/2)(a_n \cos(n\pi t/2) + b_n \sin(n\pi t/2)),$$

för varje val av konstanterna a_n, b_n, också är lösningar till vågekvationen som uppfyller $u(0,t) = u(2,t) = 0$.

Notera att

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \sin(n\pi x/2)(-(na_n\pi/2)\sin(n\pi t/2) + (nb_n\pi/2)\cos(n\pi t/2))$$

Vi söker nu den lösning som uppfyller de givna begynnelsevillkoren. Vi får

$$3\sin(\pi x) - 2\sin(3\pi x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x/2)$$

och

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{N} \sin(n\pi x/2)(nb_n\pi/2).$$

Vi ser att detta är uppfyllt om vi väljer $a_2 = 3$ och $a_6 = -2$, och resten av $a_n = 0$, samt alla $b_n = 0$. Detta ger oss slutligen lösningen

$$u(x,t) = 3\sin(\pi x)\cos(\pi t) - 2\sin(3\pi x)\cos(3\pi t).$$

Det är enkelt att verifiera att denna funktion uppfyller alla villkor.

8. Det är lätt att se att origo är en kritisk punkt till det autonoma systemet

$$\frac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y(x^2 + y^2).$$

Undersök om origo är stabil eller instabil. (Tips: använd polära koordinater).

Lösning: Linjarisering ger ingen information (Jacobimatrisen i $(0,0)$ har egenvärdena $\pm i$), så vi måste använda någon annan metod för att undersöka den kritiska punkten $(0,0)$. Vi byter till polära koordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Då har vi $r^2 = x^2 + y^2$ och $\theta = \arctan(y/x)$. Deriverar vi detta med avseende på t, och utnyttjar uttrycken för dx/dt och dy/dt i systemet, får vi

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{r}(x^2r^2 + y^2r^2) = r^3$$

och

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{r^2}(-y^2 - x^2) = -1.$$

Allstå, i polära koordinater kan systemet skrivas

$$\frac{dr}{dt} = r^3, \frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Ekvationen $dr/dt = r^3$ är autonom, och $f(r) = r^3 > 0$ för $r > 0$. Sålunda, för varje $r_0 > 0$ kommer lösningen till begynnelsevärdesproblemet $dr/dt = r^3, r(0) = r_0$ upfylla $r(t_0) > 1$ för något $t_0 > 0$. För det ursprungliga systemet betyder detta att för varje begynnelsevillkor $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ (så $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0$) gäller att lösningen $(x(t), y(t))$ som uppfyller $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ också uppfyller $|(x(t), y(t))| > 1$ för något $t > 0$. Således är origo en instabil fixpunkt.