Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1633, Differentialekvationer I
Tentamen, fredagen den 24 oktober 2014, lösningaförslag.

Del I

Modul 1. En liten mängd av ett radioaktivt ämne togs in i ett laboratorium för ett experiment. Ämnet sönderfaller enligt lagen för det radioaktiva sönderfallet som säger att sönderfallshastigheten är propotionell mot ämnets massa. Efter 1 timme blev ämnets massa 24 gram och efter 2 timmar blev ämnets massa 16 gram.

(a) Bestäm ekvation som uttrycker ämnets massa som funktion av tiden. Vad är ursprungliga massan av ämnet?

(b) Bestäm ämnets massa efter 3 timmar.

(c) Bestäm halveringstid av ämnet d v s den tiden efter vilken hälften av en given mängd av ämnet sönderfaller.

Lösning.

(a) Vi betecknar med $M(t)$ massan av ämnet efter t timmar. Att sönderfallshastigheten är propotionell mot ämnets massa innebär att funktionen $M(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dM}{dt} = -kM(t),$$

där k är någon konstant. Det är en separabel ekvation, vi skriver om den som $\frac{dM}{M} = -k$ varav integreringen ger oss $\ln M(t) = c - kt$ och $M(t) = Ce^{-kt}$ (vi betecknar $C = e^c$). För att bestämma konstanter C och k använder vi oss av data i uppgiften. Vi har $M(1) = 24$ och $M(2) = 16$ vilket ger oss ekvationer

$$Ce^{-k} = 24; \qquad Ce^{-2k} = 16.$$

Division av den första ekvation med den andra ger oss $e^k = 3/2$ varav $k = \ln(3/2)$. Insättning av $e^{-k} = 2/3$ till första ekvationen ger oss $C = 36$. Vi får

$$M(t) = 36e^{-kt}, \quad \text{där} \quad k = \ln(3/2).$$

Ursprungliga massan av ämnet är $M(0) = 36$.

(b) Efter 3 timmar får vi

$$M(3) = 36e^{-3\ln(3/2)} = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{3}.$$

(c) Halveringstid T uppfyller sambandet $M(t+T) = \frac{1}{2}M(t)$ vilket ger oss ekvation $e^{-kT} = 1/2$. Vi får $kT = \ln 2$ och

$$T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}.$$

Modul 2. Undersök system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm allmän lösning till systemet.

(b) Origo är en kritisk punkt för systemet. Vilken typ av fasporträtt har systemet nära origo? Är origo en stabil eller instabil kritisk punkt?

(c) En lösning $\mathbf{X}(t)$ av systemet uppfyller begynnelsevillkor $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Vad är beteendet av $\mathbf{X}(t)$ då $t \to \infty$?

Lösning.

(a) Vi börjar med att bestämma egenvärdena och egenvektorer av matrisen A. Karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 15.$$

Den har rötter $\lambda_1 = -5$ och $\lambda_2 = 3$. Det är egenvärdena av matrisen.

Den första egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (den som hör till $\lambda_1 = -5$) uppfyller ekvation $(A + 5I)\mathbf{v}_1 = 0$ vilket ger oss ekvation $6a + 2b = 0$ (den andra ekvation för a, b är samma). Vi får $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ och detta ger oss den första lösningen till ursprungliga systemet

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{-5t}\mathbf{v}_1 = e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Den andra egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (den som hör till $\lambda_2 = 3$) uppfyller ekvation $(A - 3I)\mathbf{v}_2 = 0$ vilket ger oss ekvation $-2c + 2d = 0$ (den andra ekvation för c, d är ekvivalent till den). Vi får $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och detta ger oss den andra lösningen till ursprungliga systemet

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{3t}\mathbf{v}_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen är godtycklig linjär kombination av $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Egenvärdena erhålna i (a) är reella och de har olika tecknar. Detta ger oss att origo är en sadelpunkt. Den är instabil.

(c) Vi skall bestämma sådana C_1 och C_2 att

$$C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vi ser direkt att $C_1 = -2$ samt $C_2 = 0$. Lösningen blir

$$\mathbf{X}(t) = -2e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $e^{-5t} \to 0$ då $t \to \infty$, avgör vi att $\mathbf{X}(t) \to 0$ då $t \to \infty$.

Modul 3. En funktion $y = 2x - 1$ är definierad på intervallet $-2 < x < 2$. Funktionen utvecklas i en fourierserie på detta intervall.

(a) Vad är utseendet av erhållna fourierserien? Bestäm koefficienten a_0 (övriga koefficienter behöver inte beräknas).

(b) Vad är summan av erhållna fourierserien på intervallet $2 < x < 6$? Vad är summan i punkten $x = 6$?

(c) För erhållna fourierserien, visa att alla koefficienter $a_n = 0$ då $n = 1, 2, \ldots$. Försök att undvika långa uträkningar!

Lösning.

(a) Intervallet har utseendet $(-2, 2)$ d v s $(-p, p)$ med $p = 2$. Detta ger oss Fourierserien

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{\pi n}{2}x) + b_n \sin(\frac{\pi n}{2}x) \right)$$

som har perioden $T = 4$.

Koefficienten a_0 är

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (2x - 1)\, dx = -2.$$

(b) Erhålna fourierserien har perioden 4. Om $2 < x < 6$, då är $-2 < x - 4 < 2$. Ursprungliga funktionen $y(x)$ i alla punkter i intervallet $(-2, 2)$ är kontinuerlig och deriverbar och konvergenssatsen ger oss att fourierserien i punkten $x - 4$ konvergerar till den ursprungliga funktionen. Vi får då

$$F(x) = F(x - 4) = 2(x - 4) - 1 = 2x - 9$$

i intervallet $2 < x < 6$.

I punkten $x = 6$ den 4-periodiska fotsättningen av $y(x)$ är diskontinuerlig. Konvergenssatsen ger oss att summan blir

$$F(6) = F(2) = \frac{y(2-) + y(2+)}{2} = \frac{y(2-) + y(-2+)}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot (-2) - 1}{2} = -1$$

(övergång från $y(2+)$ till $y(-2+)$ behövs för att hamna i intervallet $(-2, 2)$).

(c) Vi skriver om fourierserien som

$$F(x) - \frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{\pi n}{2}x) + b_n \sin(\frac{\pi n}{2}x) \right).$$

Eftersom $a_0 = -2$, får vi på intervallet $-2 < x < 2$ ekvation

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{\pi n}{2}x) + b_n \sin(\frac{\pi n}{2}x) \right)$$

d v s högerled är fourierserien av funktionen $y = 2x$. Eftersom den är udda, avgör vi att alla koefficienter $a_n = 0$ då $n = 1, 2, \ldots$.

Del II

4. Undersök ekvationen

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \qquad x > 0.$$

(2p) (a) Lös ekvationen tillsammans med begynnelsevillkor $y(1) = 2$.

(1p) (b) För lösningen erhållen i (a), bestäm det största intervallet där den är definierad.

(1p) (c) Bestäm sådana begynnelsevärdena y_0 att det finns en lösning med begynnelsevillkor $y(1) = y_0$ definierad på intervallet $1 \leq x < \infty$.

Lösning.

(a) Det är Bernoullis ekvation. Vi delar både leden med y^2 och vi får

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{x}\frac{1}{y} + \frac{1}{x^3}.$$

Vi inför den nya funktionen $z(x) = 1/y(x)$. Vi får då $z' = -y'/y^2$ och ekvationen blir

$$z' + \frac{2}{x}z = -\frac{1}{x^3}.$$

Det är en linjär ekvation. Integrerande faktorn är

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = x^2.$$

Ekvationen blir efter multiplikation med den

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 z(x)\right) = -\frac{1}{x}.$$

Integreringen ger oss $x^2 z(x) = C - \ln x$ varav $z = (C - \ln x)/x^2$ och

$$y(x) = \frac{x^2}{C - \ln x}.$$

Insättningen av $x = 1$ och $y = 2$ ger oss $2 = \frac{1}{C}$ varav $C = 1/2$. Den sökta lösningen är

$$y(x) = \frac{x^2}{1/2 - \ln x}.$$

(b) Formeln för lösningen erhållen i (a) är definierad för alla x sådana att $x > 0$ och $\ln x \neq 1/2$ d v s $x \neq \sqrt{e}$. Det största intervallet som innehåller begynnelsepunkt $x_0 = 1$ och uppfyller sådana villkor är $0 < x < \sqrt{e}$.

(c) Vi använder oss av formeln för allmän lösning erhållen i (a):

$$y(x) = \frac{x^2}{C - \ln x}.$$

Begynnelsevilkor $y(1) = y_0$ ger oss $C = 1/y_0$. Nu kommer tre olika fall:

Fall 1. $y_0 > 0$. Resonemang analog med den i (b) visar att det största intervallet där lösningen är definierad är $(0, e^{1/y_0})$, det är ett ändligt intervall.

Fall 2. $y_0 = 0$. Vi får då $C = \infty$ och detta ger oss trivial lösning $y(x) = 0$. Den är definierad överallt.

Fall 3. $y_0 < 0$. Vi får lösning

$$y(x) = \frac{x^2}{1/y_0 - \ln x}.$$

Nämnaren är negativ och nollskild för alla $x \geq 1$ och lösningen är väldefinierad i hela intervallet $[1, \infty)$.

Svar i (c): $y_0 \leq 0$.

5. Ett system av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ har fundamentalmatris

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 1 \\ 5e^t & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm allmän lösning till inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$, där $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösning.

En av standarda egenskaper hos fundamental matris är att den uppfyller ekvation $\Phi'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)$.

Vi söker nu lösningen av inhomogena systemet i form

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$$

där $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ är en ny obekant vektorfunktion. Vi får

$$\mathbf{X}'(t) = \Phi'(t)\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t).$$

Detta ger oss $\Phi\mathbf{U}' = F$ varav $\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{F}$. Vi har

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

och $\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5e^t \end{pmatrix}$. Integrering ger oss

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} 3t + C_1 \\ -5e^t + C_2 \end{pmatrix},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter. Till slut får vi lösningen

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} 6te^t + 2C_1e^t - 5e^t + C_2 \\ 15te^t + 5C_1e^t - 15e^t + 3C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6te^t - 5e^t \\ 15te^t - 15e^t \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ 5e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Klassificiera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära differentialekvationen

$$x''(t) - \mu x'(t) + \mu x^3(t) + x(t) = 0$$

för alla reella värden på parametern μ.

Lösning.

Vi inför en ny funktion $y = x'$ så att $y' = x'' = \mu x' - \mu x^3 - x$. Detta ger oss systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \mu y - \mu x^3 - x. \end{cases}$$

Kritiska punkter till det är sådana punkter (x, y) att både högerled blir 0. Vi får ett system av ekvationer

$$\begin{cases} y = 0 \\ \mu y - \mu x^3 - x = 0. \end{cases}$$

Insättningen av $y = 0$ till den andra ekvationen ger oss $x(\mu x^2 + 1) = 0$. Om $\mu \geq 0$ har den endast roten $x = 0$ och om $\mu < 0$ så har den tre rötter $x = 0$, $x = \pm\sqrt{-1/\mu}$.

Alltså, kritiska punkterna är $(0,0)$ om $\mu \geq 0$ och $(0,0)$, $(\sqrt{-1/\mu}, 0)$, $(-\sqrt{-1/\mu}, 0)$ om $\mu < 0$.

Vi undersöker nu stabilitet av kritiska punkterna m h av linearisering. Funktionalmatris av högerled av vårt system (d v s Jakobis matris) är

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3\mu x^2 - 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Vi undersöker först origo som kritisk punkt. Jakobis matris i origo blir

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Karakteristiska ekvationen för egenvärdena är $\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$. Egenvärdena är

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1}.$$

Om $\mu > 0$ då är ett av egenvärdena $\lambda_1 = \frac{\mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1}$ antingen reelt och positivt eller komplext med positiv reeldel. Detta ger oss att origo blir instabil kritisk punkt för $\mu > 0$. Om $\mu < 0$ då är både egenvärdena antingen reella och negativa (om $\mu \leq -2$) eller komplexa med negativ reeldel (om $-2 < \mu < 0$). Origo är en stabil kritisk punkt då (även asymptotiskt stabil). Om $\mu = 0$, då är egenvärdena imaginära tal $\pm i$. För lineariserad system detta innebär att man har en stabil centrum. Vi observerar att i detta fallet då $\mu = 0$ blir ursprungliga systemet ett linjärt system

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

och samma resultatet att origo är en stabil centrum gäller även för ursprungliga systemet.

Nu undersöker vi kritiska punkterna $(\sqrt{-1/\mu}, 0)$, $(-\sqrt{-1/\mu}, 0)$ i fallet $\mu < 0$. Jakobis matris blir

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \mu \end{pmatrix}$$

i både punkter. Karakteristiska ekvationen för egenvärdena är $\lambda^2 - \mu\lambda - 2 = 0$ och egenvärdena är

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + 2}.$$

Både egenvärdena är reella och de har olika tecknar, detta ger oss sadelpunkt som är instabil.

Svar till uppgiften.

1. Om $\mu < 0$ då är kritiska punkterna $(0,0)$ som är stabil och $(\sqrt{-1/\mu}, 0)$, $(-\sqrt{-1/\mu}, 0)$ som är instabila.

2. Om $\mu = 0$ då finns det endast kritisk punkt $(0,0)$ som är stabil.

3. Om $\mu > 0$ då finns det endast kritisk punkt $(0,0)$ som är instabil.

7. Funktioner $x(t)$ och $y(t)$ är definierade för $t \geq 0$ och de uppfyller ekvationer

$$x(t) = \int_0^t y(u)e^{2(t-u)}\,du;$$

$$y(t) = -2\int_0^t x(u)e^{u-t}\,du + e^{2t}.$$

Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$.

Lösning.

Vi använder oss av Laplacetransform. Låt $X(s)$ och $Y(s)$ vara Laplacetransformer av de sökta funktioner $x(t)$ och $y(t)$. Vi tar nu Laplacetransform av både ekvationer. Högerled av den första ekvationen är en faltning av funktioner $y(t)$ och e^{2t}. Efter Laplacetransform ekvationen blir $X(s) = Y(s)\frac{1}{s-2}$.

Integralen i den andra ekvationen är en faltning av funktioner $x(t)$ och e^{-t} (OBS! den andra funktionen är INTE e^t utan e^{-t} eftersom det står $e^{u-t} = e^{-(t-u)}$ i integralen!) Efter Laplacetransform den andra ekvationen blir

$$Y(s) = -2X(s)\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}.$$

Allså, vi får ett system av algebraiska ekvationer

$$\begin{cases} X(s) = Y(s)\frac{1}{s-2}; \\ Y(s) = -2X(s)\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}. \end{cases}$$

Insättningen av $X(s) = \frac{Y(S)}{s-2}$ till den andra ekvationen ger oss

$$Y(s) = \frac{-2}{(s-2)(s+1)}Y(s) + \frac{1}{s-2},$$

varav

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-1)} \quad \text{och} \quad X(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)}.$$

Partiellbråkuppdelningen ger oss

$$X(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{-2}{s-1} + \frac{3/2}{s-2}$$

och

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s-1}.$$

Invers Laplacetransform ger till slut lösningarna

$$x(t) = \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t} \quad \text{och} \quad y(t) = 2e^t - 1.$$

8. Lös Laplaces ekvation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ i rektangeln $0 < x < \pi$, $0 < y < 2$ med randvillkor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0; \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0; \;\; u(x,0) = 0; \;\; u(x,2) = 1 - \cos(4x).$$

Lösning.

Vi söker först produktlösningar i form $u(x,y) = F(x)G(y)$. Homogena radvillkor $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$ och $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0$ ger oss villkor $F'(0) = 0$ och $F'(\pi) = 0$. Villkor $u(x,0) = 0$ ger oss $G(0) = 0$.

Insättningen av $u(x,y) = F(x)G(y)$ till Laplaces ekvation ger oss

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

och division med $F(x)G(y)$ ger ekvationen

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Eftersom vänsterledet beror endast på variabeln x och högerledet beror endast på variabeln y ekvationen uppfylls endast när både leden är samma konstant. Vi får således två ekvationer

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda; \qquad \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda.$$

Nu undersöker vi tre olika möjligheter för konstanten λ.

Fall 1: $\lambda = \alpha^2 > 0$. Ekvationen $F''(x) = \alpha^2 F(x)$ har allmän lösning $F(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$. Undersökning av randvillkor $F'(0) = F'(\pi) = 0$ ger oss $C = D = 0$ vilket innebär att detta fall ger oss endast triviala losningen $u(x,y) = 0$.

Fall 2: $\lambda = 0$. Ekvationen $F''(x) = 0$ ger oss $F(x) = Dx + C$ och randvillkor $F'(0) = F'(\pi) = 0$ ger $D = 0$ d v s $F(x) = C$. Den andra ekvationen $G''(y) = 0$ ger oss $G(y) = A + By$ och ransvillkor $G(0) = 0$ ger $A = 0$ d v s $G(y) = By$. Alltså , i fallet $\lambda = 0$ produktlösningen är $u(x,y) = A_0 y$ (där $A_0 = CB$ är en konstant).

Fall 3. $\lambda = -\alpha^2 < 0$. Ekvationen $F''(x) = -\alpha^2 F(x)$ har lösningen

$$F(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x).$$

Randvillkor $F'(0) = F'(\pi) = 0$ ger $C_2 = 0$ och $\alpha = n = 1, 2, \ldots$ där n är positiva heltal. Alltså $F(x) = C_n \cos(nx)$. Den andra ekvationen $G''(y) = \alpha^2 G(y)$ ger oss $G(y) = B_1 e^{\alpha y} + B_2 e^{-\alpha y}$ och villkor $G(0) = 0$ ger $B_2 = -B_1$. Alltså för $\alpha = n$ får vi $G(y) = B_n(e^{ny} - e^{-ny})$ och produktlösningen är

$$u(x, y) = A_n \cos(nx) \left(e^{ny} - e^{-ny}\right)$$

(här $A_n = B_n C_n$).

Nu använder vi oss av superpositionsprincipeln. Summa av produktlösningar har utseendet

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) \left(e^{ny} - e^{-ny}\right).$$

Vi skall nu välja koefficienter A_n så att det sista villkor $u(x, 2) = 1 - \cos(4x)$ uppfylls. Insättning av $y = 2$ till formeln för $u(x, y)$ ger oss

$$2A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) \left(e^{2n} - e^{-2n}\right) = 1 - \cos(4x).$$

Den likheten är möjlig om $A_0 = 1/2$; $A_4 = -\frac{1}{e^{2\cdot 4} - e^{-2\cdot 4}}$ och $A_n = 0$ då $n \neq 0$, $n \neq 4$. Hela lösningen blir då

$$u(x, y) = \frac{y}{2} - \frac{\cos(4x)\left(e^{4y} - e^{-4y}\right)}{e^8 - e^{-8}}.$$