

Matematiska Institutionen, KTH

**Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 23 oktober 2017 kl 08.00-13.00.**

**Examinator:** Pär Kurlberg

**OBS:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang. Lycka till!

1. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 1, \\ x_2' = x_1. \end{cases}$$

Låt  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Det karakteristiska polynomet  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$  har rötterna  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ , med motsvarande egenvektorer

$$k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Med

$$\bar{b}_1 = \Re(k_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \Im(k_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ges en fundamental lösningsmängd av  $\bar{x}_1 = \bar{b}_1 \cos t - \bar{b}_2 \sin t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  och  $\bar{x}_2 = \bar{b}_2 \cos t + \bar{b}_1 \sin t = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ .

För att hitta en partikulärlösning  $\bar{x}_p$  gör vi ansatsen  $\bar{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  (med  $a, b$  konstanter);

då  $\bar{x}_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  måste vi välja  $\bar{x}_p$  så att  $A\bar{x}_p = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och vi får  $\bar{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2. (4p) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

där

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi/2 \\ \sin(2t), & t \geq \pi/2. \end{cases}$$

**Lösning:** Låt  $U(t)$  beteckna Heavisidefunktionen. Vi kan skriva  $f(t)$  som  $f(t) = U(t - \pi/2) \sin 2t$ .

Låt  $Y(s), F(s)$  vara Laplacetransformen av  $y(t)$  respektive  $f(t)$ . Formelbladet ger

$$\mathcal{L}(U(t - \pi/2) \sin 2t) = -\mathcal{L}(U(t - \pi/2) \sin 2(t - \pi/2)) = -e^{-\pi s/2} \frac{2}{s^2 + 4}$$

Laplacetransformering av ekvationen ger då

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = -e^{-\pi s/2} \frac{2}{s^2 + 4}$$

som ger att  $(s^2 + 16)Y(s) = s - e^{-\pi s/2} \frac{2}{s^2 + 4}$  och vi ser att

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 16} - e^{-\pi s/2} \frac{2}{(s^2 + 4)(s^2 + 16)}$$

Eftersom

$$\frac{1}{(s^2 + 4)(s^2 + 16)} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{s^2 + 4} - \frac{1}{s^2 + 16} \right)$$

ger formelbladet att

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 16} \right\} = \cos 4t$$

och

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 4)(s^2 + 16)} \right\} = \frac{1}{24} \sin 2t - \frac{1}{48} \sin 4t$$

vilket ger att

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-\pi s/2} \frac{2}{(s^2 + 4)(s^2 + 16)} \right\} &= \left( \frac{1}{12} \sin 2(t - \pi/2) - \frac{1}{24} \sin 4(t - \pi/2) \right) U(t - \pi/2) \\ &= \left( -\frac{1}{12} \sin 2t - \frac{1}{24} \sin 4t \right) U(t - \pi/2) \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis får vi att

$$y(t) = \begin{cases} \cos 4t & \text{om } 0 \leq t < \pi/2, \\ \cos 4t + \frac{1}{12} \sin 2t + \frac{1}{24} \sin 4t & \text{om } t \geq \pi/2. \end{cases}$$

3. Låt  $f(t)$  vara den *udda*  $2\pi$ -periodiska funktion som på intervallet  $[0, \pi)$  ges av  $f(t) = t^2$ .

(a) (1p) Konvergerar Fourierserien till  $f(t)$  i punkterna  $t = \pi$  och  $t = \frac{3\pi}{2}$ ? I så fall till vad? Motivera.

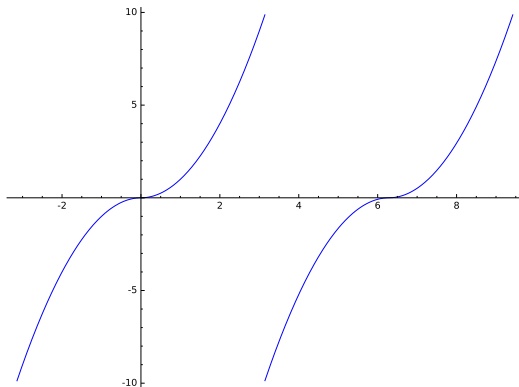
Eftersom  $f$  är styckvist glatt konvergerar Fourierserien, i en punkt  $a$ , till

$$\left( \lim_{t \rightarrow a^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) \right) / 2.$$

Då  $\lim_{t \rightarrow \pi^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow (-\pi)^+} f(t) = -\pi^2$  och  $\lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) = \pi^2$  ser vi att Fourierserien konvergerar till 0 i punkten  $t = \pi$ .

Eftersom  $f(3\pi/2) = f(-\pi/2) = -\pi^2/4$  och  $f$  är kontinuerlig i  $(-\pi, \pi)$  ser vi att Fourierserien konvergerar till  $-\pi^2/4$  i punkten  $t = 3\pi/2$ .

(b) (1p) Skissa grafen till  $f$  på intervallet  $(-\pi, 3\pi)$ .



(c) (2p) Beräkna Fourierserien till  $f$ .

Eftersom  $f$  är udda blir  $a_n = 0$  för all  $n$ .

Igen då  $f$  är udda får vi

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \sin(nt) dt$$

Enligt tabell är  $\int t^2 \sin(nt) dt = \frac{2-n^2t^2}{n^3} \cos(nt) + \frac{2t \sin(nt)}{n^2}$  och då  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  får vi att

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( \frac{2-n^2\pi^2}{n^3} \cdot (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right).$$

4. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält. (De blå linjerna är pilskäft, de svarta punkterna är pilspetsar.) **Anm.:** det räcker att räkna ut egenvärdena.

$$1. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$2. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$3. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$4. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Egenvärden för de fyra olika matriserna ges av  $[2, -1]$ ,  $[2 - 3\sqrt{-1}, 2 + 3\sqrt{-1}]$ ,  $[-5 - 8\sqrt{-1}, -5 + 8\sqrt{-1}]$  samt  $[-1, -6]$

Eftersom expansion/kontraktion avläses mha egenvärdenas realdel bör vi para ihop enligt följande:  $1 \rightarrow B$ ,  $2 \rightarrow D$ ,  $3 \rightarrow C$  samt  $4 \rightarrow A$ .

5. (4p) Bestäm alla kritiska punkter till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 \end{cases}$$

och klassificera dem (om möjligt) m.a.p. stabilitet.

Vi bestämmer först de kritiska punkterna genom att lösa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 = 0 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 = 0, \end{cases}$$

som ger att  $x = y^2$ ,  $y^6 - y = 0$ , dvs  $y(y^5 - 1) = 0$  vilket implicerar att  $y = 0$  eller  $y = 1$ . Vi ser att  $(x, y) = (0, 0)$  och  $(x, y) = (1, 1)$  är de enda kritiska punkterna.

Med  $P(x, y) = -y + x^3$ ,  $Q(x, y) = x - y^2$  får vi Jacobimatrisen

$$J = \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix},$$

och  $(0, 0)$  ger då matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdena  $\pm i$ . Eftersom realdelen av  $i$  är noll kan vi inte med den sats vi har avgöra huruvida  $(0, 0)$  är stabil eller inte.

Jacobimatrisen för  $(1, 1)$  blir  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Eftersom determinanten är  $-5$  är egenvärdena reella, och av olika tecken — således är  $(1, 1)$  en instabil kritisk punkt.

6. Givet en konstant  $c \geq 1$ , betrakta den autonoma differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + c, \quad y(0) = 0.$$

- (a) (2p) Antag att  $c = 1$ . Visa att  $y(t) \rightarrow \infty$  inom ändlig tid, dvs att

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} y(t) = \infty$$

för något  $t_1 > 0$ .

- (b) (2p) Antag att  $c > 1$ . Eftersom vi då får att  $y^2 + c > y^2 + 1$  borde  $y(t)$  växa snabbare än i del (a). Visa att denna intuition är korrekt, dvs att det finns  $t_c < t_0$  så att

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} y(t) = \infty$$

Ekvationen är separabel, och integration av

$$\frac{dy}{y^2 + c} = dt$$

ger

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \arctan(y/\sqrt{c}) = t + c_1$$

och således är

$$y = \sqrt{c} \tan(\sqrt{c}t + c_2)$$

och  $y(0) = 0$  ger att  $c_2 = 0$ .

För  $c = 1$  får vi  $y(t) = \tan(t)$ , och  $y(t) \rightarrow \infty$  då  $t \rightarrow (\pi/2)^-$ , dvs vi kan ta  $t_1 = \pi/2$ .

För  $c > 1$  ser vi att  $y(t) \rightarrow \infty$  då  $\sqrt{c}t \rightarrow (\pi/2)^-$ , dvs då  $t \rightarrow t_c^-$  med  $t_c = \pi/(2\sqrt{c})$ . Eftersom  $c > 1$  ser vi att  $t_c < t_1$ .

7. (4p) Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0,$$

samt

$$u(x, 0) = 1 + \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Vi gör ansatsen  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Differentialekvationen ger då

$$XT' = 5X''T$$

som vi skriver om som

$$T'/T = 5X''/X = \lambda$$

för någon konstant  $\lambda$ .

Randvillkoren för  $x = 0$  samt  $x = 1$  ger att  $X'(0) = X'(1) = 0$  (notera att  $T \equiv 0$  bara ger trivial lösning). Differentialekvationen

$$X'' - \frac{\lambda}{5}X = 0, \quad X'(0) = X'(1) = 0$$

har bara trivial lösning om  $\lambda > 0$ . Skriv nu  $\lambda/5 = -\alpha^2$  för något  $\alpha \geq 0$ ; lösningarna ges då av

$$X = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x).$$

Fallet  $\alpha = 0$  ger konstant lösning, vi antar nu att  $\alpha > 0$ . Då

$$X' = \alpha(-c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x))$$

ger  $X'(0) = 0$  att  $c_2 = 0$ . Vidare ger  $X'(1) = 0$  att  $c_1 \sin(\alpha) = 0$  och för icke-triviala lösningar måste därför  $c_1 \neq 0$  och  $\sin(\alpha) = 0$ , dvs  $\alpha = \pi \cdot n$  för  $n = 1, 2, \dots$ . Vi noterar att  $\alpha = 0$  fås genom att ta  $n = 0$  i föregående diskussion, och att  $\alpha = \pi \cdot n$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$  gäller om  $\alpha \geq 0$ . Sammanfattningsvis får vi att

$$X(x) = c_1 \cos(\pi n x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

och  $\lambda = -5\alpha^2 = -5\pi^2 n^2$ .

Vi får nu enkelt att lösningarna till  $T' - \lambda T = 0$  ges av

$$T = c_3 e^{\lambda t} = c_3 e^{-5(\pi n)^2 t}$$

och således satisfierar

$$u_n(x, t) = \cos(\pi n x) \cdot e^{-5(\pi n)^2 t}$$

differentialekvationen samt Neumann-randvärdena.

Vi gör sedan ansatsen

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x, t)$$

och söker  $a_n$  så att randvärdet  $u(x, 0) = 1 + \cos(\pi x)$  är uppfyllt. Vi ser nu att

$$u(x, t) = 1 + \cos(\pi x) \cdot e^{-5\pi^2 t}$$

ger en lösning.

8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

- (a) (2p) Bestäm två olika lösningar till begynnelsevärdesproblemet.  
 (b) (2p) Visa att begynnelsevärdesproblemet har oändligt många lösningar.

Ekvationen är separabel och integration av  $dy/\sqrt{y} = dt$  ger  $2\sqrt{y} = t + c$ ; randvillkoret  $y(0) = 0$  ger sedan att  $c = 0$ . En lösning ges alltså av

$$y_1(t) = t^2/4.$$

Vi ser att även  $y_2 \equiv 0$  är en lösning.

Vi kan nu kombinera lösningarna i del (a) på följande sätt: givet  $a > 0$ , låt

$$y_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t \leq a, \\ (t - a)^2/4 & \text{för } t > a. \end{cases}$$

Begynnelsevärdesproblemet har alltså oändligt (ouppräkneligt) många lösningar.