Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer, den 19 december 2022 kl 08.00-12.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582) samt Kevin Schnelli (08-7907202).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

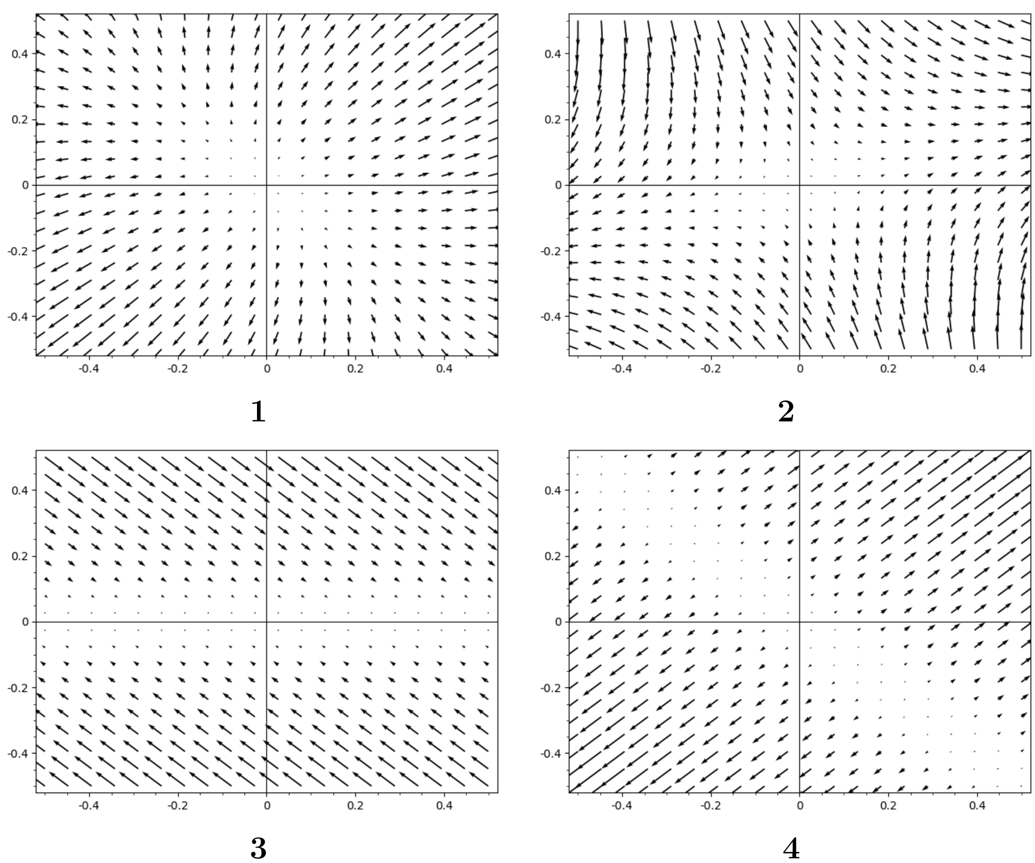
1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält (du behöver inte motivera svaret.)

   (a) $\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$

   (b) $\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2\,y.$

   (c) $\frac{dx}{dt} = 2\,y, \quad \frac{dy}{dt} = -2\,y.$

   (d) $\frac{dx}{dt} = 3\,x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 3\,y.$



4,2,3,1.

2. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$$

och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Sätt $z = 1/y$; vi får $z' = -y'/y^2$ som ger $-y^2 z' - y = e^x y^2$ och vi får den linjära ekvationen

$$z' + z = -e^x$$

med integrerande faktor e^x. Detta ger

$$\frac{d}{dx}(ze^x) = -e^{2x}$$

och $z = Ce^{-x} - e^x/2$, och vi får

$$y = 1/z = \frac{1}{Ce^{-x} - e^x/2}.$$

Koll:

$$VL = y' - y = \frac{2\,(2\,Ce^{-x} + e^x)}{(2\,Ce^{-x} - e^x)^2} - \frac{2}{2\,Ce^{-x} - e^x} = \frac{4e^x}{(2\,Ce^{-x} - e^x)^2}$$

och

$$HL = \frac{4\,e^x}{(2\,Ce^{-x} - e^x)^2}$$

och vi ser att $VL = HL$.

Vi ser att även $y(x) = 0$ för alla x är en lösning.

3. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$x'' - ax = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

Finn alla $a \in \mathbb{R}$ så att lösningen till begynnelsevärdesproblemet är begränsad då $t \to \infty$.

Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - a$.

Om $a > 0$, låt $\lambda = \sqrt{a}$; lösningarna kan då skrivas som

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$$

och $x'(0) = 0$ ger $c_1 = c_2$ som ger $c_1 = c_2 = 1/2$, dvs $x(t) = (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})/2$ som ej är begränsad då $t \to \infty$.

Om $a = 0$ ges lösningarna av $x(t) = c_1 t + c_2$; $x'(0) = 0$ ger $c_1 = 0$ och $x(0) = 1$ ger $c_2 = 1$, och $x(t) = 1$, som är begränsad.

Om $a < 0$, skriv $\lambda = \sqrt{-\lambda} > 0$; lösningarna kan då skrivas som

$$x(t) = c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t$$

och vi ser direkt att alla lösningar är begränsade eftersom sin och cos är begränsade.

Svar: $a \leq 0$.

4. (4p) Lös integralekvationen

$$y(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau)\, d\tau.$$

Integralen är en faltning av $y(t)$ och $\sin(t)$ och vi kan mha Laplacetransformen skriva om ekvationen som

$$Y(s) = 6/s^4 + \frac{Y(s)}{s^2+1}$$

som ger

$$Y(s) = \frac{6(s^2+1)}{s^6} = 6/s^4 + 6/s^6.$$

Inverstransformering ger nu

$$y(t) = t^3 + 6t^5/120 = t^3 + t^5/20.$$

---

5. (4p) Lös vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

samt

$$u(x,0) = x(1-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

Ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $T''X = TX''$ som vi kan skriva om som $T''/T = X''/X = -\lambda$.

Ekvationen för X blir då $X'' + \lambda X = 0$ med randvillkor $X(0) = X(1) = 0$, som bara har icketriviala lösningar om $\lambda > 0$.

Vi skriver $\lambda = w^2$ och lösningar ges då av $X(t) = c_1 \sin(wx) + c_2 \cos(wx)$. Randvillkoret ger $X(0) = X(1) = 0$ och vi ser direkt att $c_2 = 0$, och sedan att $w = \pi \cdot n$ där $n = 1, 2, 3, \cdots$ är ett heltal ($n = 0$ ger trivial lösning.) Således är $\lambda = \pi^2 n^2$ och

$$X_n(x) = C_n \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

ger lösningar.

Ekvationen för T blir då $T'' + \lambda T = 0$ som, med $\lambda = \pi^2 n^2$ har lösningen $T(t) = c_1 \sin(\pi n t) + c_2 \cos(\pi n t)$. Med hjälp av superposition får vi lösningar till ekvationen, med x-randvillkoret uppfyllt, på formen

$$\sum_{n \geq 1} \sin(\pi n x) \cdot (a_n \cos(\pi n t) + b_n \sin(\pi n t))$$

Vi ser att $u(x,0) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(\pi n x)$ och att $\frac{du}{dt}(x,0) = \sum_{n \geq 1} (b_n \pi n) \cdot \sin(\pi n x)$, och för att hitta a_n, b_n gör vi en udda utvidgning av $x(1-x)$ till $[-1,1]$ och bestämmer sinusserien till utvidningen.

Vi får

$$a_n = 2\int_0^1 \sin(\pi n x)x(1-x)\,dx$$

Med tabell får vi $\int_0^1 x\sin(\pi nx)\,dx = (-1)^{n+1}/(\pi n)$ och $\int_0^1 x^2\sin(\pi nx)\,dx = ((2-\pi^2n^2)(-1)^n-2)/(\pi n)^3$, vilket ger

$$a_n = 4\cdot\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^3}$$

och

$$b_n = 4\cdot\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^4}$$

Svar:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos(\pi nt) + \frac{1-(-1)^n}{\pi n^4}\sin(\pi nt)\right)\sin(\pi nx)$$

6. (4p) Skriv ekvationen

$$x'' = 2x^3$$

som ett första ordningens system och klassificera alla dess kritiska punkter m.a.p. stabilitet.

Med $y = x'$ ger $x'' = 2x^3$ systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = 2x^3 \end{cases}.$$

Kritiska punkter fås då $(x', y') = (0,0)$, dvs $y = 2x^3 = 0$ som bara har en lösning, nämligen $x = y = 0$.

Jacobianen ges av

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

och $J_{0,0,} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ som bara ett egenvärde, nämligen $\lambda = 0$. Linjärisering ger således ingen information.

Fasplanmetoden ger ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2x^3}{y}$$

vilket ger $y\,dy = 2x^3\,dx$ som ger $y^2/2 = x^4/2 + C$, eller $y^2 = x^4 + 2C$. Ur fasporträttet ser vi direkt att det finns banor som börjar godtyckligt nära $(0,0)$ (tag tex $C = 0$ och $(x(0), y(0)) = (\epsilon, \epsilon^2)$ för $\epsilon > 0$ godtyckligt liten (notera att $x' > 0$ och $y' > 0$ gäller i kvadranten $x > 0, y > 0$ så dessa banor avlägsnar sig från $(0,0)$.)

7. (4p) Låt A vara en 3×3 matris med tre distinkta reella egenvärden. Bestäm en fundamental lösningsmängd till systemet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

och visa att den verkligen är en sådan.