Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer, den 25 oktober 2022 kl 08.00-12.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582) samt Kevin Schnelli (08-7907202).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

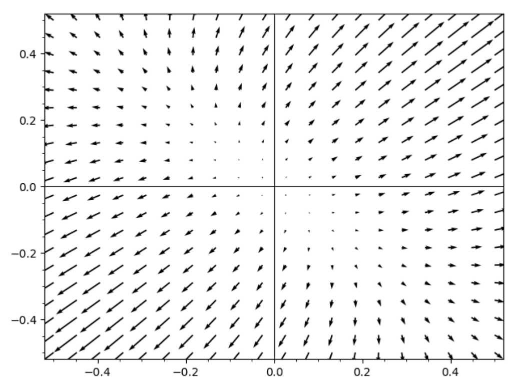
1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält (du behöver inte motivera svaret.)

   (a) $\frac{dx}{dt} = x - 2\,y, \quad \frac{dy}{dt} = 2\,x - y.$

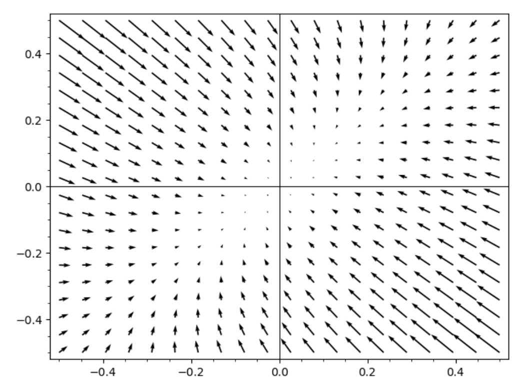
   (b) $\frac{dx}{dt} = x + 2\,y, \quad \frac{dy}{dt} = 2\,x + y.$

   (c) $\frac{dx}{dt} = 2\,x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2\,y.$

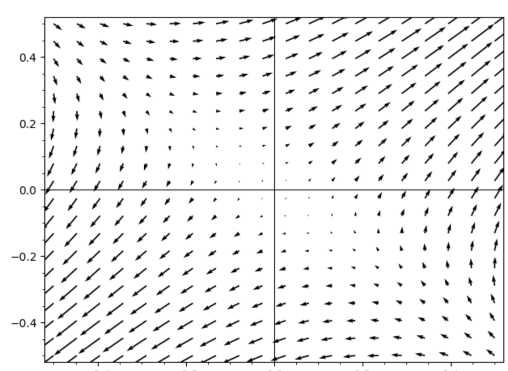
   (d) $\frac{dx}{dt} = -2\,x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2\,y.$



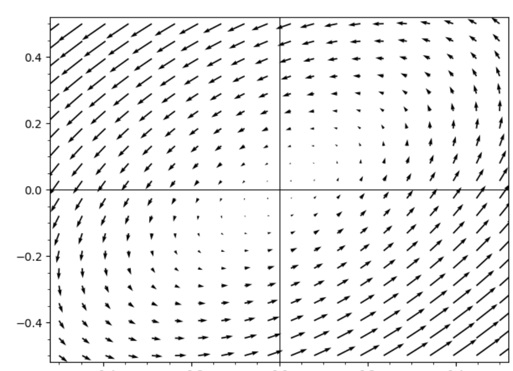
1



2



3



4

1c,2d,3b,4a

2. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$xy' - 3y = x^4, \quad y(1) = 2$$

och ange det maximala existensintervallet.

Om $x \neq 0$ är ekvationen ekvivalent med

$$y' - \frac{3}{x}y = x^3$$

som är en linjär första ordningens ekvation med integrerande faktor $e^{-3\ln x} = 1/x^3$, och vi får

$$\frac{1}{x^3}y' - \frac{3}{x^4}y = 1$$

vilket ger $(y/x^3)' = 1$ som i sin tur leder till $y = x^4 + Cx$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger $C = 1$ och således ges lösningen av $y = x^4 + x^3$. Insättning av denna lösning satisfierar ekvationen för alla $x \in \mathbb{R}$.

3. (4p) Betrakta systemet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Bestäm alla $\vec{x}_0$ så att $|\vec{x}(t)| \to 0$ då $t \to \infty$.

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$, med motsvarande egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen ges av $\vec{x}(t) = C_1 e^{-t}\vec{v}_1 + C_2 e^{5t}\vec{v}_2$ och vi ser att $C_2 \neq 0$ ger att $|y(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$, samt att $C_2 = 0$ ger $|\vec{x}(t)| \to 0$ då $t \to \infty$.

Svar: $\vec{x}_0 = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ för alla $C \in \mathbb{R}$.

4. (4p) Systemet

$$\begin{cases} x' &= x + y - 2xy \\ y' &= -2x + y + 3y^2 \end{cases}$$

har en kritisk punkt i $(0,0)$. Klassificera, om möjligt, punkten $(0,0)$ med avseende på stabilitet.

Jacobianen i punktes (x,y) ges av $J_{x,y} = \begin{pmatrix} 1-2y & 1-2x \\ -2 & 1+6y \end{pmatrix}$ och vi ser att $J_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Eftersom $\det(J_{0,0}) = 3$ har egenvärdena samma tecken, eller är komplexkonjugerade , och då $\operatorname{trace}(J_{0,0}) = 2$ ser vi att båda egenvärdena till $J_{0,0}$ har strikt positiv realdel — den kritiska punkten är alltså instabil. (Mer precist, en instabil spiralpunkt eftersom egenvärdena är $1 \pm \sqrt{-2}$.)

5. (4p) Funktionen $f(t)$ är udda och periodisk med perioden 2π. Vidare är

$$f(t) = t - \pi, \quad \text{då } 0 < t < \pi.$$

(a) (2p) Utveckla f i en Fourierserie.

(b) (2p) Använd Fourierserien för att beräkna summan av

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad .$$

a: eftersom f är udda blir Fourierserien en ren sinusserie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

där

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt.$$

Detta ger

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t-\pi) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[(t-\pi)(-\frac{\cos nt}{n}) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos(nt)\, dt$$

$$= \frac{-2}{n} + \frac{2}{\pi n} \left[\frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Alltså

$$f(t) \sim (-2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

b: $t = \pi/2$ är en kontinuitetspunkt och

$$\sin((n\pi)/2) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ jämnt} \\ (-1)^{k+1} & \text{om } n = 2k-1, \text{ udda, } k \geq 1 \end{cases}$$

varför

$$(-2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = f(\pi/2) = -\pi/2$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \pi/4.$$

6. (4p) Betrakta ekvationen

$$y'' + y = 2\delta(t) + A\delta(t - t_0), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

där t_0, A är reella tal. Bestäm A och det *minsta* $t_0 > 0$ så att $y(t) = 0$ för alla $t \geq 10$.

Laplacetransformering ger

$$(s^2 + 1)Y = 2 + Ae^{-st_0}$$

och vi får

$$Y = \frac{2}{s^2+1} + \frac{Ae^{-st_0}}{s^2+1}$$

som efter inverstransform ger

$$y(t) = 2\sin(t) + u_{t_0}(t)A\sin(t-t_0).$$

För att $y(t)=0$ skall gälla för alla stora t måste vi ha $2\sin(t)+A\sin(t-t_0)=0$ för alla stora t, vilket ger $A=\pm 2$. Om $A=2$ är $t_0=\pi$ det minsta reella talet med den önskade egenskapen; med $A=-2$ är $t_0=2\pi$ det minsta reella talet med önskad egenskap.

Svar: $A=2, t_0=\pi$.

---

7. (4p) Låt $u=u(x,y)$ vara en funktion av två variabler. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad 0<x<\pi, \quad y>1 & (1) \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 & (2) \\ u(x,1)=\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x. & (3) \end{cases}$$

Vi söker lösningar på produktform som satisfierar (1) och det homogena randvillkoret (2). Låt $u(x,y)=X(x)Y(y)$; insättning i (1) ger

$$X''Y - yXY' = 0$$

dvs $X''/X = yY'/Y$. Dessa kvoter måste vara konstanta och vi får

$$\begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ Y' + \frac{\lambda}{y}Y = 0 \end{cases}$$

för någon konstant λ. Vi väljer $\lambda=\alpha^2>0$ som ger trigonometriska lösningar till ekvationen för X:

$$X = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x$$

Randvillkoret (2) ger $X(0)=X(\pi)=0$ dvs $X(0)=c_1=0$ och $X(\pi)=c_2\sin\alpha\pi=0$. För att lösningen skall varar icke-trivial måste vi ha $c_2\neq 0$ vilket ger $\sin\alpha\pi=0$, dvs

$$\alpha\pi = n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Det räcker att ta $\alpha=n$, $n\geq 1$ vilket ger

$$X(x)=c_2\sin nx.$$

Ekvationen för Y blir

$$Y' + \frac{n^2}{y}Y = 0$$

som har den integrerande faktorn $e^{n^2\ln y} = y^{n^2}$, vilket ger

$$Y = c_3 y^{-n^2}.$$

Vi får produktlösningen

$$u_n(x,y) = b_n y^{-n^2} \sin nx, \quad n \geq 1$$

Superpositionsprincipen gäller då vi har en homogen linjär ekvation och ett homogent randvillkor (2), varför

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^{-n^2} \sin nx$$

också satisfierar (1) och (2). Randvillkoret (3) ger

$$u(x,1) = \sum_{n=1} b_n \sin nx = \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x,$$

vilket ger $b_1 = 1$, $b_3 = 1/2$, och övriga $b_n = 0$.

Svar: $u(x,y) = \frac{1}{y} \sin x + \frac{1}{2y^9} \sin 3x$.