Matematiska Institutionen, KTH

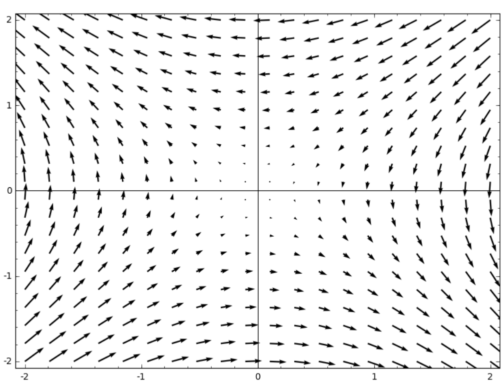
Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 22 oktober 2018 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg

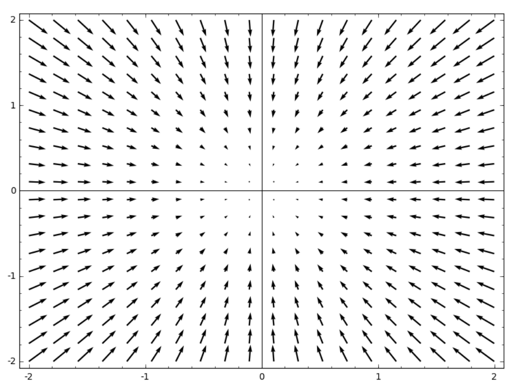
OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.
För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält. **Anm.:** det räcker att räkna ut egenvärdena.

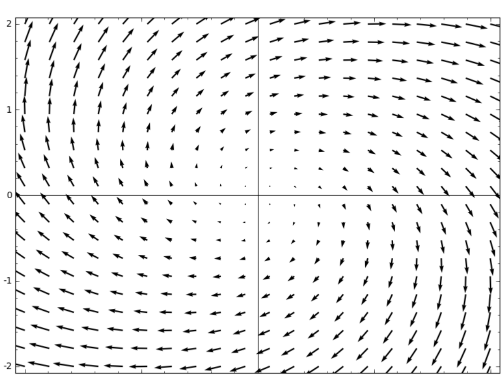
   1. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$
   2. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$
   3. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$
   4. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$



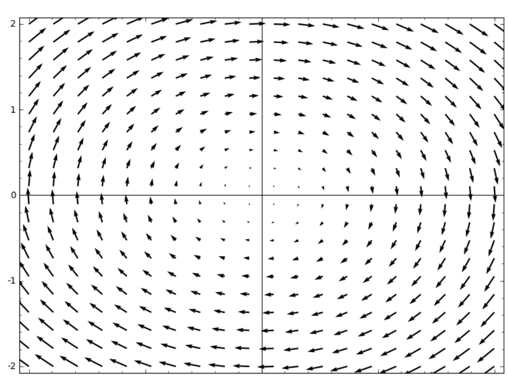
A



B



C



D

1C, 2B, 3D, 4A.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = 2\delta(t-3), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

med Laplacetransformsmetoden.

Laplacetransform ger

$$s^2Y(s) + Y(s) = 2e^{-3s}$$

och vi får

$$Y(s) = 2e^{-3s}/(s^2+1)$$

Då $\mathcal{L}^{-1}(1/(s^2+1)) = \sin(t)$ ger translationsregeln att

$$y(t) = 2\sin(t-3)u_3(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2\sin(t-3), & t \ge 3 \end{cases}$$

3. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x^2y' + y = xy, \quad y(1) = 2$$

samt ange existensintervallet för lösningen.

Omskrivning ger ekvationen (för $x > 0$)

$$y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)y = 0$$

Den integrerande faktorn blir då $e^{-1/x - \ln x} = e^{-1/x}/x$, och

$$(ye^{-1/x}/x)' = 0$$

ger $y = Cxe^{1/x}$ för någon konstant C. Insättning av $y(1) = 2$ ger $C = 2/e$.

Svar: $y = 2e^{-1}xe^{1/x}$; lösningen existerar för $x > 0$.

4. Flervalsfrågor:

- (2p) Intervallet, där lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$(\ln t)y' + \frac{1}{t-3}y = t, \quad y(2) = 0$$

existerar och är unik, är

(a) $(1, 3)$,
(b) $(3, +\infty)$,
(c) $(0, 3)$,
(d) $(-\infty, 3)$.

- (2p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = y^3 - y, \quad y(0) = 1/2$$

Finn, utan att explicit lösa ekvationen, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

(a) $+\infty$,
(b) 1,
(c) 0,
(d) -1.

Svar: (a) samt (c).

---

5. (4p)

(a) Visa att differentialekvationen

$$4ty'' + 2y' + y = 0, \quad t > 0$$

har den allmänna lösningen

$$y = c_1 \cos\sqrt{t} + c_2 \sin\sqrt{t}, \quad t > 0$$

(b) Visa att $y = t - 1$ löser ekvationen

$$4ty'' + 2y' + y = t + 1$$

och ange lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$4ty'' + 2y' + y = t + 1, \quad , y(\pi^2) = \pi^2, \quad y'(\pi^2) = 0.$$

(a) Eftersom ekvationen är linjär, och av andra ordningen, räcker det att verifiera $y_1 = \cos(\sqrt{t})$ samt $y_2 = \sin(\sqrt{t})$ är lösningar. (Att de är oberoende följer lätt av att Wronskianen är proportionell mot $1/\sqrt{t}$.)
Med $y = y_1$ får vi $y' = -\sin(\sqrt{t})/(2\sqrt{t})$ och

$$y'' = -\cos(\sqrt{t})/(4t) - \frac{\sin(\sqrt{t})}{2}\frac{-1/2}{t^{3/2}},$$

som ger att

$$4ty''+2y'+y = 4t\left(-\cos(\sqrt{t})/(4t) - \frac{\sin(\sqrt{t})}{2}\frac{-1/2}{t^{3/2}}\right) - 2\sin(\sqrt{t})/(2\sqrt{t}) + \cos(\sqrt{t})$$

$$= -\cos(\sqrt{t}) + \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{1/2}} - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{1/2}} + \cos(\sqrt{t}) = 0$$

En liknande räkning visar att även y_2 är en lösning.

(b) Om vi låter $y = y_p = t - 1$ ser vi att $y' = 1, y'' = 0$ och således är

$$4ty'' + 2y' + y = 0 + 2 + t - 1 = t + 1$$

och y_p är en lösning till det inhomogena systemet.
Den allmänna lösninger är på formen

$$y = c_1 \cos(\sqrt{t}) + c_2 \sin(\sqrt{t}) + t - 1$$

Insättning i $y(\pi^2) = \pi^2$ ger

$$c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi + \pi^2 - 1 = \pi^2$$

och vi ser att $c_1 = -1$. Det andra begynnelsevärdet, dvs $y'(\pi^2) = 0$ ger

$$c_1 \frac{-\sin \pi}{2\pi} + \frac{c_2 \cos \pi}{2\pi} + 1 = 0 - \frac{c_2}{2\pi} + 1 = 0$$

som ger att $c_2 = 2\pi$.
Svar: lösningen ges av

$$y = -\cos(\sqrt{t}) + 2\pi \sin(\sqrt{t}) + t - 1$$

---

6. (4p) Lös vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0,$$

samt

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Vi ansätter $u(x, t) = X(x)T(t)$ och får

$$T''/(7T) = X''/X = -\lambda.$$

Fall $\lambda < 0$: Med $\lambda = -\alpha^2$ får vi

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

som har den allmänna lösningen $X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$. Randvillkoren $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ger $c_1 = c_2 = 0$ (eller $T(t) = 0$ för alla t) — bara trivial lösning.

Fall $\lambda = 0$: vi får $X'' = 0$, dvs $X = ax + b$. Randvillkoren ger igen $a = b = 0$, och bara trivial lösning erhålles.

Fall $\lambda > 0$: med $\lambda = \alpha^2$ får vi

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

och den allmänna lösningen ges av $X = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$. Om T inte är noll för alla t, så ger $u(0,t) = 0$ att $c_2 = 0$. Därav följer att $\alpha = \pi n$ för något heltal $n > 0$.

Om $\lambda = \alpha^2 = \pi^2 n^2$ ger $T'' + 7\lambda T = 0$ att $T(t) = c_1 \sin(\sqrt{7}\pi n t) + c_2 \cos(\sqrt{7}\pi n t)$; randvillkoret $\partial u/\partial t(x,0) = 0$ för $0 < x < 1$ ger att $c_1 = 0$.

Således: givet heltal $n > 0$ så är $u_n(x,t) = c_1 \sin(\pi n x)\cos(\sqrt{7}\pi n t)$ en lösning till alla ekvationer förutom det näst sista randvillkoret $u(x,0) = \sin 2\pi x - \sin 4\pi x$. Fourierutveckling av högerledet ger omedelbart att en lösning ges av

$$u(x,t) = \sin(2\pi x)\cos(\sqrt{7}\pi 2t) - \sin(4\pi x)\cos(\sqrt{7}\pi 4t).$$

---

7. (4p) Låt den 2-periodiska funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x-1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(a) Utveckla f i en Fourierserie.

(b) Vad är seriens summa i punkten $x = 1/2$?

(c) Använd Fourierserien för att visa att

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots = \pi/4.$$

(a) Eftersom f är udda är $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n x)$, med

$$b_n = 2\int_0^1 (x-1)\sin(\pi n x)dx = 2\left(\left[(x-1)\frac{-\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi n x}{\pi n}dx\right)$$

$$= 2(-1/(\pi n) + 0) = -2/(\pi n).$$

Svar: $f(x) \sim \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n}$.

(b) Eftersom f är styckvis kontinuerligt deriverbar och kontinuerlig i punkten $x = 1/2$ så säger konvergenssatsen att Fourierserien konvergerar mot $f(1/2) = 1/2 - 1 = -1/2$

(c) Enligt tidigare räkningar får vi

$$-1/2 = f(1/2) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n/2}{n}.$$

som ger att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n/2}{n} = \pi/4$. Då $\sin \pi n/2 = 0$ för jämna n, och $\sin(\pi(4k+1)/2) = 1$ samt $\sin(\pi(4k+3)/2) = -1$ (för k heltal) ser vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n/2}{n} = 1 - 1/3 + 1/5 - \ldots$$

Alltså är summans värde lika med $\pi/4$.

---

8. (4p) Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x(x^2+y^2) - xy^2,\\ \frac{dy}{dt} &= -y(x^2+y^2) + x^2y.\end{aligned} \tag{1}$$

Visa att den kritiska punkten $(0,0)$ är stabil. Ledtråd: använd polära koordinater.

Derivering av $r^2 = x^2 + y^2$ ger

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

och insättning av dx/dt samt dy/dt ger

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\big(x(-xr^2 - xy^2) + y(-yr^2 + x^2y)\big) = \frac{1}{r}\big(-x^2r^2 - x^2y^2 - y^2r^2 + x^2y^2)\big)$$

$$= \frac{-r^2}{r}(x^2+y^2) = -r^3.$$

Vi ser att $r = 0$ är en kritisk punkt; då $dr/dt < 0$ för $r > 0$, ger vårt stabilitetskriterie för ekvationer i en variabel att $r = 0$ är en stabil kritisk punkt. Således, oavsett initialvärdet $r(0)$ (och $\theta(0)$ för den delen) ser vi att $r(t) \to 0$ då $t \to \infty$: systemet är stabilt.
