Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer, den 26 oktober 2021 kl 08.00-12.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582) samt Kevin Schnelli (08-7907202).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

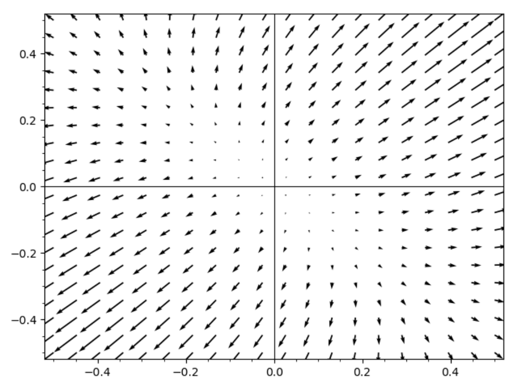
1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält (du behöver inte motivera svaret.)

   (a) $\frac{dx}{dt} = 2\,x + 3\,y, \quad \frac{dy}{dt} = 4\,x + y.$

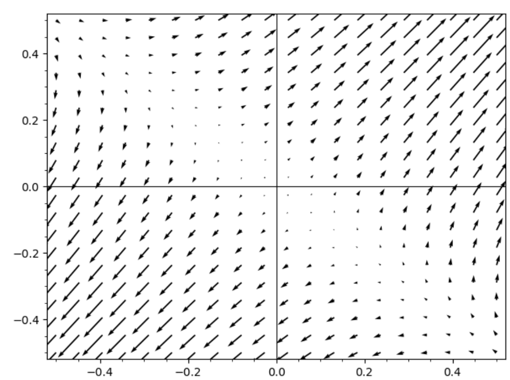
   (b) $\frac{dx}{dt} = 2\,x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2\,y.$

   (c) $\frac{dx}{dt} = 2\,x + 3\,y, \quad \frac{dy}{dt} = 4\,x + 3\,y.$

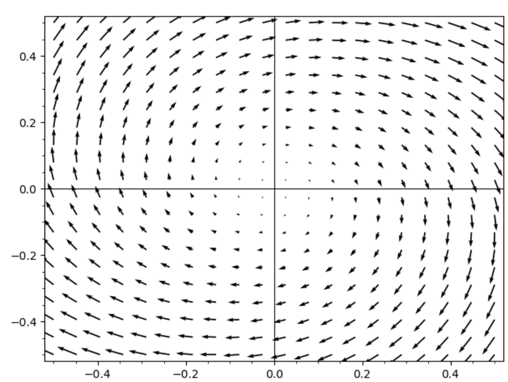
   (d) $\frac{dx}{dt} = x + 4\,y, \quad \frac{dy}{dt} = -4\,x + y.$



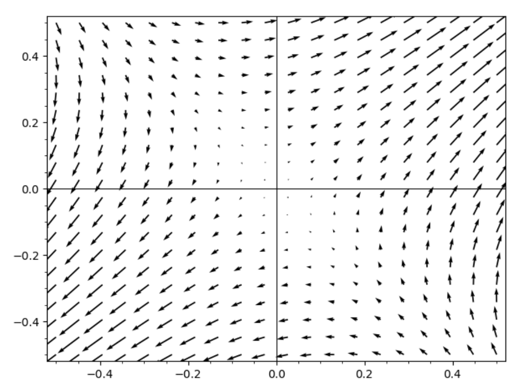
1



2



3



4

a4, b1, c2, d3.

2. Betrakta systemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) (3p) Bestäm den allmänna lösningen.

(b) (1p) Bestäm en fundamentalmatris $\Phi(t)$ till systemet (1) sådan att

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$ har rötterna $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$. Icketriviala lösningar till de linjära ekvationssystemen $(A - \lambda_1 I)x = 0$ och $(A - \lambda_2 I)x = 0$ ges av egenvektorerna $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a: Den allmänna lösningen är

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi söker nu lösningar x_1, x_2 så att $x_1(0) = e_1$ och $x_2(0) = e_2$, vilket ger

$$x_1(0) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som ger $a_1 = a_2 = 1/2$ samt

$$x_2(0) = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ger $b_2 = 1/4, b_1 = -1/4$.

Vi får $x_1(t) = 1/2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1/2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $x_2(t) = -1/4e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1/4e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b: Om vi låter $\Phi(t) = (x_1(t)\ x_2(t))$ får vi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}/2 + e^{3t}/2 & -e^{-t}/4 + e^{3t}/4 \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{-t}/2 + e^{3t}/2 \end{pmatrix}.$$

---

3. Ekvationen

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0 \tag{2}$$

har en lösning på formen $y(x) = ax + b$ där a, b är konstanter.

(a) (1p) Finn en icke-trivial lösning till ekvation (2).

(b) (3p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvation (2).

Om $y = ax + b$ får vi $y' = a$ och $y'' = 0$; insättning i ekvationen ger $x^2 \cdot 0 + 2xa - 2(ax + b) = 0$ och vi ser att $b = 0$ och, t.ex., att $a = 1$ ger en lösning.

a: $y_1(x) = x$ är en icketrivial lösning.

Vi ansätter nu $y = uy_1 = u \cdot x$, vilket ger $y' = u'x + u$ och $y'' = u''x + 2u'$. Insättning i ekvationen ger

$$x^2(u''x + 2u') + 2x(u'x + u) - 2ux = 0$$

vilket ger

$$u''x^3 + u'4x^2 = 0$$

Vi sätter $v = u'$ och får ekvationen

$$v' + (4/x)v = 0$$

som har IF $e^{\int 4/x dx} = e^{4 \ln x} = x^4$; multiplikation med denna ger $(vx^4)' = 0$ och vi får $v = c_1/x^4$, $u = c_2/x^3$ och $y = xu = c/x^2$

b: den allmänna lösningen ges av

$$y(x) = Ax + B/x^2$$

där A, B är konstanter.

4. (4p) Systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{4}(3 - 4y - 2x). \end{cases}$$

har en kritisk punkt (a, b) som uppfyller $a > 0, b > 0$. Bestäm denna och avgör dess stabilitet.

De stationära punkterna fås genom att lösa

$$\begin{cases} 1 - x - y = 0 \\ 3 - 4y - 2x = 0 \end{cases} \quad ;$$

elimination ger $3 - 4(1 - x) - 2x = 0$ och vi får $x = 1/2$ som ger $y = 1/2$. Alltså är $a = b = 1/2$ den sökta punkten.

Jacobianen ges av

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -y/2 & (3 - 8y - 2x)/4 \end{pmatrix}$$

och

$$J_{1/2,1/2} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/4 & -2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

som har determinant $(1 - 1/2)/4 > 0$, vilket ger att realdelen av båda egenvärdena har samma tecken. Då spåret är strikt negativt ser vi att båda egenvärdena har strikt negativ realdel. Systemet är således (asymptotiskt) stabilt.

5. (4p) Använd Laplacetransformen för att lösa ekvationen

$$y'' + 4y = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Vi skriver ekvationen som $y'' + 4y = \sin(t) + \sin(t - \pi)u_\pi(t)$; Laplacetransform ger då

$$s^2 Y(s) - 1 + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

och

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+4)}\left(1 + \frac{1}{s^2+1}(1 + e^{-\pi s})\right)$$

Partialbråksuppdelning ger

$$1/(s^2+1) \cdot 1/(s^2+4) = (1/(s^2+1) - 1/(s^2+4))/3$$

och invers Laplacetransform ger

$$y(t) = \begin{cases} 1/2 \sin 2t + 1/3(\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)), & 0 \le t < \pi \\ 1/2 \sin 2t + 1/3(\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)) + \frac{1}{3}(\sin(t-\pi) - \frac{1}{2}\sin(2(t-\pi))), & t \ge \pi \end{cases}$$

som efter förenkling ger

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t, & 0 \le t \le \pi \\ \frac{1}{6}\sin 2t, t \ge \pi. \end{cases}$$

---

6. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0, \\ \sin x & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

och utvidga f till en 2π-periodisk funktion.

(a) (3p) Bestäm Fourierserien för f.

(b) (1p) Vad är Fourierseriens summa i $x = 5\pi/4$?

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\cos x\right]_0^\pi = \frac{-1}{\pi}(\cos(\pi) - 1) = 2/\pi.$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[x/2 - \sin(2x)/4\right]_0^\pi = 1/2$$

För $n > 1$ får vi (eftersom $\sin(x) \cdot \sin(nx)$ är en jämn funktion)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\sin(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \sin(x)\sin(nx)\, dx = 0$$

eftersom $\{\sin(nx)\}_{n\ge 1}$ är en ortogonal mängd på $[-\pi, \pi]$.

För $n = 1$ får vi

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx$$

och genom att utnyttja att $\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)/2$ ser vi att $\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx = 1/2\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0$.

För $n > 1$ får vi

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx$$

och integraltabell ger nu att

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((n-1)x)}{2(n-1)} - \frac{\cos((n+1)x)}{2(n+1)}\right]_0^\pi$$

Vi noterar nu att n udda ger att $n \pm 1$ är jämna, och således är $a_n = 0$ om n är udda (eftersom $\cos(2k\pi) = \cos 0 = 1$ om $k \in \mathbb{Z}$.)

Om n är jämn får vi

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}-1}{2(n-1)} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2}{2(n-1)} - \frac{-2}{2(n+1)}\right)$$

$$= (1/(n+1) - 1/(n-1))/\pi = \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}$$

a:

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}$$

Eftersom f är kontinuerlig, och f' är styckvist kontinuerlig ger konvergenssatsen att Fourierserien konvergerar mot $f(5\pi/4) = f(5\pi/4 - 2\pi) = f(-3\pi/4) = 0$.

b: Fourierserien konvergerar mot 0.

---

7. (4p) Lös Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

med randvillkor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad 0 < y < 1$$

samt

$$u(x,0) = \cos\pi x, \quad u(x,1) = \cos 2\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Ledtråd: om L är linjär och du kan hitta u_1, u_2 så att $L(u_1) = f_1$ och $L(u_2) = f_2$ så är $L(u_1 + u_2) = f_1 + f_2$.

Produktansatsen $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ger ekvationen $X''Y + XY'' = 0$, som vi kan skriva om som

$$X''/X = -Y''/Y = -\lambda$$

där λ är konstant.

Bara triviala lösningar fås då $\lambda < 0$ medans $\lambda = 0$ ger lösningar på formen $X(x) = c_0$.

Med $\lambda = w^2 > 0$ får vi ekvationen $X'' + w^2 X$, som har allmän lösning

$$X(x) = c_1 \sin(wx) + c_2 \cos(wx).$$

Då $X'(0) = 0$ ser vi att $c_1 = 0$, och $X'(1) = 0$ ger att $w = n\pi$ för något heltal $n \geq 1$.

Sammanfattningsvis, för varje heltal $n \geq 0$ får vi lösningen $X_n(x) = c_n \cos(nx)$ (svarande mot $\lambda = \pi^2 n^2$.)

Vi skriver om $Y'' - \lambda Y = 0$ som $Y'' - \pi^2 n^2 Y = 0$, som har den allmäna lösningen $Y(y) = c_1 e^{\pi n y} + c_2 e^{-\pi n y}$. Vi delar upp randvillkoren för $u(x, 0)$ och $(x, 1)$ i två fall, där ena randvillkoret byts ut mot (tex) $u(x, 0) = 0$, och löser dessa separat.

$u(x, 0) = 0$ ger $Y(0) = 0$ vilket ger $Y(y) = C(e^{\pi n y} - e^{-\pi n y})$. Andra randvillkoret ger $u(x, 1) = \cos 2\pi x$, och vi ser att

$$u_1(x, y) = \cos(2\pi x) \frac{e^{2\pi y} - e^{-2\pi y}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}$$

löser ekvationen, med $\partial u/\partial x = 0$ för $x = 0$ samt $x = 1$, och de modifierade randvillkoren $u_1(x, 0) = 0$ och $u_1(x, 1) = \cos(2\pi x)$

På samma sätt ser vi att

$$u_2(x, y) = \cos(\pi x) \frac{e^{\pi(y-1)} - e^{-\pi(y-1)}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$$

löser ekvationen, uppfyller $\partial u/\partial x = 0$ för $x = 0$ samt $x = 1$, samt de modifierade randvillkoren $u_2(x, 0) = \cos \pi x$ och $u_2(x, 1) = 0$.

Den sökta lösningen ges av $u = u_1 + u_2$, dvs

$$u(x, y) = \cos(2\pi x) \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} + \cos(\pi x) \frac{e^{\pi(y-1)} - e^{-\pi(y-1)}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}.$$