Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer, den 21 oktober 2019 kl 08.00-12.00.

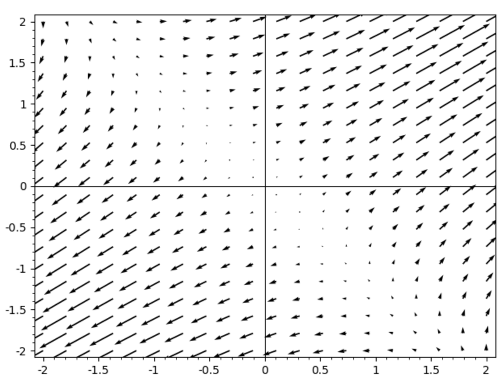
Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582) samt Kevin Schnelli (08-7907202).

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

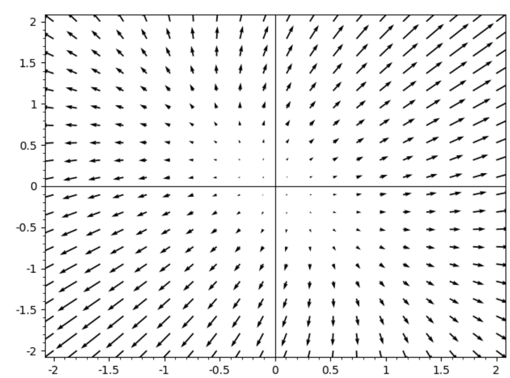
Tentalydelsen finns på svenska och engelska. Dina svar kan vara på svenska eller engelska. Formelblad finns efter den engelska tentalydelsen.

1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält.

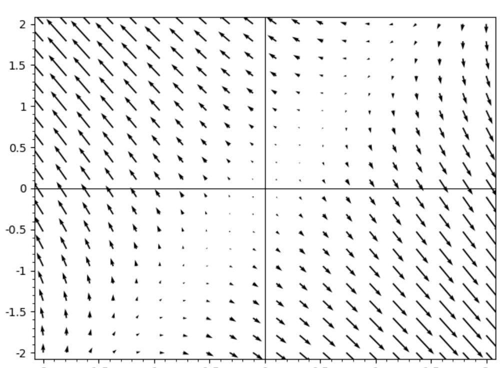
   1. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$
   2. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}$
   3. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$
   4. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$



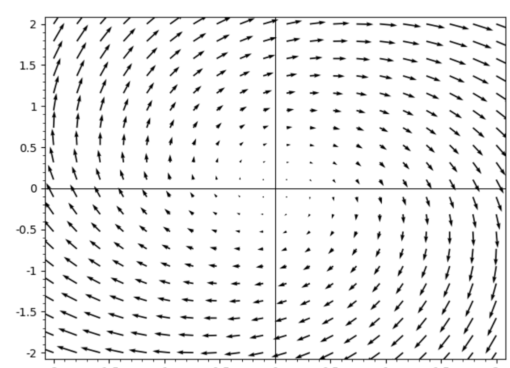
A



B



C



D

1A, 2B, 3C, 4D.

2. (4p) Betrakta differentialekvationen

$$x''(t) - \frac{1}{t}x'(t) + \frac{1}{t^2}x(t) = 0\,. \tag{1}$$

En lösning ges av $x_1(t) = t$, vilket lätt kan verifieras.

Finn en andra, linjärt oberoende lösning till (1), och ange den allmänna lösningen.

Vi gör ansatsen $x_2(t) = c(t)x_1(t) = c(t)t$ (reduktion av order). Insättning i DE ger

$$c''(t)t + 2c'(t) - \frac{1}{t}c'(t)t - \frac{1}{t}c(t) + \frac{1}{t}c(t) = 0\,,$$

i.e.

$$c''(t)t + c'(t) = 0\,.$$

Om vi sätter $u(t) := c'(t)$, får vi $u'(t)t + u(t) = 0$, som har lösningen $u(t) = c_1/t$, med c_1 en godtycklig konstant. Integrering ger då

$$c(t) = c_1 \ln|t| + c_2\,,$$

så att $x_2(t) = c_1 t\ln|t| + c_2 t$. Därför är en annan linjär oberoende lösning till (1) $x_2(t) = t\ln|t|$.

Den allmänna lösningen till (1) är

$$x(t) = c_1 t\ln|t| + c_2 t\,.$$

3. (4p) Lös, med hjälp av Laplacetransformen, begynnelsevärdesproblemet

$$y' + 3y = 13\sin 2t, \quad y(0) = 6,$$

för $t \geq 0$

Laplacetransformering ger $sY - 6 + 3Y = 13 \cdot \frac{2}{s^2+4}$ och vi får

$$Y = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{1}{13}(\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4})$$

som ger $Y = \frac{6}{s+3} + 2(\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4})$. Inverstransformering ger då att

$$y(t) = 8e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t.$$

4. Betrakta följande tillväxtmodell

$$N'(t) = N(t)\left(\frac{1}{4} - \frac{N(t)}{1+(N(t))^2}\right), \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

där $N(t) \geq 0$ är storleken på population vid tid $t \geq 0$.

(a) (1p) Finn de stationära lösningarna till (2).

(b) (3p) Klassificera de stationära lösningarna m.a.p. stabilitet.

Ledtråd: Analysera rötterna till funktionen $f(x) := x \cdot \left(\frac{1}{4} - x/(1+x^2)\right)$.

(a) Vi söker nollställen till $f(x) = x \cdot \left(\frac{1}{4} - x/(1+x^2)\right)$. Ett första nollställe är $x = 0$. Så vi söker rötterna till $g(x) := \left(\frac{1}{4} - x/(1+x^2)\right)$, som är $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Därför har (2) de stationära lösningarna $N(t) = 0$, $N(t) = 2 - \sqrt{3}$ och $N(t) = 2 + \sqrt{3}$, $t \geq 0$.

(b) På intervallet $(0, 2-\sqrt{3})$ är $f(x) > 0$, på intervallet $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ är $f(x) < 0$, och på intervallet $(2+\sqrt{3}, \infty)$ är $f(x) > 0$. Så de stationära lösningarna $N(t) = 0$ och $N(t) = 2+\sqrt{3}$ är instabila, medan $N(t) = 2-\sqrt{3}$ är stabil.

---

5. Låt $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) (2p) Lös begynnelsevärdeproblemet

$$\vec{\boldsymbol{x}}' = A\vec{\boldsymbol{x}}, \quad \vec{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (2p) Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\vec{\boldsymbol{x}}' = A\vec{\boldsymbol{x}}$ och klassificera dessa med avseende på stabilitet.

(a) Egenvärdena är rötter till $\lambda^2 + 5\lambda = 0$ som ger $\lambda_1 = -5$ samt $\lambda_2 = 0$. Lösning av ekvationssystem ger att motsvarande egenvektorer (tex) ges av $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen är alltså på formen

$$c_1 e^{-5t} v_1 + c_2 v_2.$$

Initialvillkoret $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger ett linjärt ekvationssystem med lösningen $c_1 = 1/5$, $c_2 = 3/5$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet blir då

$$x(t) = (1/5)e^{-5t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (3/5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösningar till $x' = Ax = 0$ ges av $x = c \cdot v_2$, med v_2 som i del (a) och $c \in \mathbb{R}$; de kritiska punkterna bildar alltså en linje som spänns upp av v_2.

Låt w vara en kritisk punkt. Om $x(0) = w + \epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2$ ser vi att (notera att v_1, v_2 är ortogonala)

$$|x(t) - w|^2 = |\epsilon_1 e^{-5t} v_1 + \epsilon_2 v_2 + w - w|^2 = |\epsilon_1 e^{-5t} v_1 + \epsilon_2 v_2|^2$$

$$= \epsilon_1^2 e^{-10t} |v_1|^2 + \epsilon_2^2 |v_2|^2 \le \epsilon_1^2 |v_1|^2 + \epsilon_2^2 |v_2|^2$$

för alla $t \ge 0$. Således, givet $\rho > 0$: om vi väljer ϵ_1, ϵ_2 så små att $\epsilon_1^2 |v_1|^2 + \epsilon_2^2 |v_2|^2 \le \rho^2$ ser vi att $|x(t) - w|^2 \le \rho^2$ gäller för $t \ge 0$, och därför gäller $|x(t) - w| \le \rho$ för alla $t \ge 0$. Alla kritiska punkter är alltså stabila (men inte asymptotiskt stabila eftersom $x(t)$ EJ går mot w om $\epsilon_2 \ne 0$.)

Alternativt: rita riktningsfält och notera att alla punkter på linjen L, som spänns upp av v_2, är kritiska. För $x \notin L$ pekar riktningsfältet mot den punkt på L som är närmast x. Således kommer avståndet mellan en kritisk punkt w och en lösning $x(t)$ alltid att avta, och systemet är därför stabilt.

---

6. Betrakta följande randvärdesproblem för $u(x,t)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} & = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, & \\ u(x,0) & = \sin(\frac{\pi}{L}x)\,, & x \in [0,L]\,, \\ u(0,t) & = 0\,, \quad u(L,t) = 0\,, & t \ge 0\,, \end{cases}$$

där $x \in [0, L]$. Randvärdesproblemet beskriver värmeledningen i en stav med längd L, med initial temperaturfördelning given av $f(x)$, då båda ändpunkterna hålls vid temperatur noll.

(a) (3p) Finn lösningen $u(x,t)$.

(b) (1p) Bestäm gränsvärdet av temperaturfördelningen då $t \to \infty$.

(a) Vi gör produktansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i PDEn ger

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} := -\lambda\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Genom att lösa ekvationen för $T(t)$ får vi

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

där vi nu väljer $\lambda \ge 0$ så att vi får en begränsad lösning om $t \nearrow \infty$. Så vi skriver $\lambda = \alpha^2$ och ekvationen för $X(x)$ blir

$$X''(x) = -\alpha^2 X(x)\,,$$

som har den allmänna lösningen

$$X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)\,.$$

Som produkt lösning har vi nu

$$u(x,t) = X(x)T(t) = (c_1 \cos(\lambda^2 x) + c_2 \sin(\lambda^2 x))T(0)\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}$$

Nu kan vi utnyttja randvillkoret for att se att

$$u(x,t) = \sin\big(\frac{\pi}{L}x\big)\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{L^2}t}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{L},$$

är lösningen till vårt randvärdesproblem.

(b) Om $t \nearrow \infty$, får vi $u(x,t) \to 0$, då $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{L^2}t} = 0$.

---

7. Betrakta den generella andra ordningens homogena linjära ekvation

$$x''(t) + p(t)x'(t) = 0\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

där $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en given kontinuerligt deriverbar funktion. Låt $x_1(t), x_2(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två linjärt oberoende lösningar till (3) och låt $W(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$ vara den associerade Wronski-determinanten.

(a) (2p) Visa att $W(t)$ satisfierar differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = -p(t)W(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

(b) (2p) Finn den allmänna lösningen till (4).

(a) Vi beräkna derivatan

$$\begin{aligned} W'(t) &= x_1'(t)x_2'(t) + x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t) - x_1'(t)x_2'(t) \\ &= x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t)\,. \end{aligned}$$

Från (3) får vi då

$$\begin{aligned} W'(t) &= x_1(t)(-p(t))x_2'(t) + p(t)x_1'(t)x_2(t) \\ &= -p(t)(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)) = -p(t)W(t)\,, \end{aligned}$$

som är (4).

(b) Låt nu $P(t) := \int_0^t p(s)\mathrm{d}s$, som är en primitiv funktion till $p(t)$. Då får vi den integrerande faktorn $\mathrm{e}^{P(t)}$ till (4). Därför ges lösningen till (4) av

$$W(t) = W(0)\mathrm{e}^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s}.$$

. . . .

Lycka till!

. . . .