Matematiska Institutionen, KTH

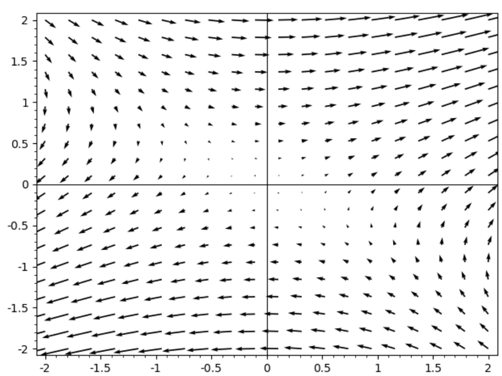
Tentamen SF1633, Differentialekvationer, den 20 oktober 2020 kl 08.00-12.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582) samt Kevin Schnelli (08-7907202).

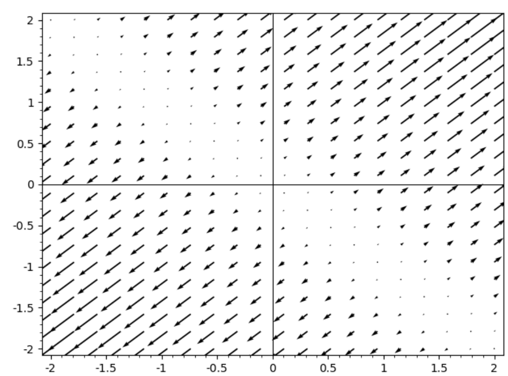
OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält.

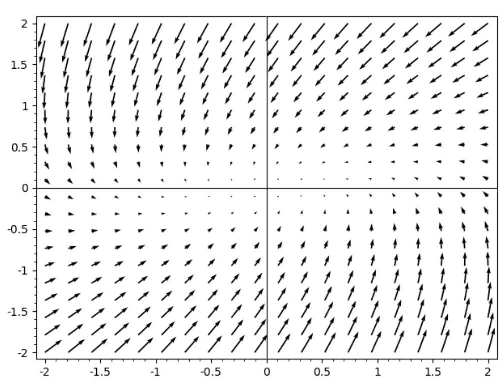
   1. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$
   2. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$
   3. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$
   4. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$



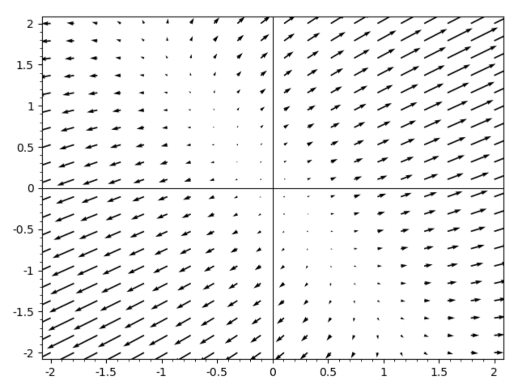
A



B



C



D

D, A, C, B.

---

2. Funktionen $y(t) = e^t$ är en lösning till ekvationen

$$tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = 0, \quad t > 0 \tag{1}$$

(a) Bestäm en fundamental lösningsmängd av lösningar till (1). (3p)

(b) Bestäm den lösning som satisfierar begynnelsevillkoret

$$x(1) = 0, \quad x'(1) = e. \qquad \text{(1p)}$$

Ansatsen $x = ue^t$ och insättning i ekvationen ger

$$u''t + u'(2t - 2t - 1) = u''t - u' = 0;$$

med $v = u'$ får vi $v't - v = 0$ eller $v' - (1/t)v = 0$. Multiplication med IF $e^{\int(-1/t)dt} = 1/t$ ger

$$\frac{d}{dt}(v/t) = 0$$

och således får vi $v = ct$, som ger $u = Dt^2 + E$, och $x = (Dt^2 + E)e^t$ (där c, D, E är konstanter.) Då $e^t > 0$ för alla t och $1, t^2$ är uppenbart linjärt oberoende (ett polynom av grad 2 kan som mest ha 2 nollställen) ser vi att en fundamental lösningsmängd ges av

$$x_1 = e^t, \quad x_2 = t^2e^t.$$

För att hitta c_1, c_2 så att $x = c_1x_1 + c_2x_2$ löser BVP noterar vi att $x(1) = 0$ ger $(c_1 + c_2)e^1 = 0$, och således är $c_1 + c_2 = 0$. Vi får då $x' = c_1e^t + c_2(2te^t + t^2e^t)$ och således

$$e = x'(1) = c_1e + c_2(2e + e) = c_22e$$

som ger $c_2 = 1/2$ och $c_1 = -1/2$.

Alltså ger $x(t) = (t^2e^t - e^t)/2$ en lösning till BVP.

---

3. (4p) Lös begynnelsvärdesproblemet

$$y'' + y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

där δ är Diracs delta-funktion.

Vi noterar först att Laplacetransform av $y_1'' + y_1 = \delta(t - \pi)$ ger $s^2Y_1 + Y_1 = e^{-\pi s}$, och $Y_1 = e^{-\pi s}/(s^2 + 1)$. Laplacetabell ger nu $y_1(t) = \sin(t - \pi)U(t - \pi)$.

På samma sätt ser vi att Laplacetransform av $y_2'' + y_2 = \delta(t - 3\pi)$ ger $y_2 = \sin(t - 3\pi)U(t - 3\pi)$. Eftersom ekvationen är linjär kan vi lägga ihop lösningarna och vi får att lösningen ges av

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \sin(t-\pi)U(t-\pi) + \sin(t-3\pi)U(t-3\pi) = -\sin(t)(U(t-\pi) + U(t-3\pi))$$

---

4. Låt $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, och utvidga f till en 2π-periodisk funktion.

(a) Argumentera för att Fourierserien blir en ren sinusserie utan att räkna ut Fourierkoefficienterna. (1p)

(b) Bestäm Fourierserien för f. (2p)

(c) Vad är Fourierseriens summa i $x = 3\pi/2$? (1p)

---

a: Eftersom $f(x)$ är udda på $(-\pi, \pi)$ så ges Fourierserien av en sinus-serie.

b: Vi har $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ där $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)dx$. Partiell integration ger

$$\int x \sin(nx)dx = \frac{-x\cos(nx)}{n} + \int \frac{\cos(nx)}{n}dx = \frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

som ger

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -\pi\cos(n\pi)/n = -\pi(-1)^n/n$$

och vi får $b_n = -(2/n)(-1)^n$. Fourierserien ges alltså av

$$2\bigg(\sin(x) - \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 - \sin(4x)/4 + \cdots\bigg)$$

c: Eftersom f, f' är styckvist kontinuerliga ger konvergenssatsen att Fourierserien är en 2π-periodisk utvidgning av $f(x)$, och att värdet av serien i en kontinuitetspunkt till (utvidgningen av) f ges av (utvidgningen av) f. Eftersom $f(3\pi/2) = f(-\pi/2) = -\pi/2$ så konvergerar Fourierserien mot $-\pi/2$.

---

5. (4p) Lös Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

med randvillkor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad 0 < y < 1$$

samt

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = x, \quad 0 < x < 1.$$

Ansaten $u(x,y) = X(x)Y(x)$ ger

$$X''/X = -Y''/Y = -\lambda$$

för λ konstant.

Vi noterar först att randvillkoren $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=1} = 0$ ger $X'(0) = X'(1) = 0$.

Fall 1, $\lambda < 0$: vi får ekvationen $X'' + \lambda X = 0$, vars allmänna lösning är $c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, och $X'(0) = 0$ ger $c_1 - c_2 = 0$, vi ser då att att $X'(1)$ ger $c_1 = c_2 = 0$. Dvs vi får bara den trivial lösningen.

Fall 2, $\lambda = 0$: vi får ekvationen $X'' = 0$ vars allmänna lösning ges av $ax + b$, och $X(0') = X'(1) = 0$ ger $a = 0$. Vi noterar även att $Y'' = 0$ har allmänn lösning $Y(y) = Dy + C$, och randvillkoret $Y(0) = 0$ ger $C = 0$. Vi ser att $u_0(x,y) = D_0 y$ är en lösning.

Fall 3, $\lambda > 0$: vi skriver $\lambda = w^2$ med $w > 0$. Den allmänna lösningen ges av $X = c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx)$. Randvillkoret $X'(0) = 0$ ger $c_2 = 0$, och $X'(1) = 0$ ger (för icketrivial lösning) $\sin(w) = 0$, dvs $w = \pi n$ för $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Ekvationen $-Y''/Y = -\lambda = -w^2 = (\pi n)^2$ har den allmänna lösningen $Y = c_1 e^{wy} + c_2 e^{-wy}$; randvillkoret $Y(0) = 0$ ger $c_1 + c_2 = 0$, eller $Y(y) = c(e^{\pi n y} - e^{-\pi n y})$ för c någon konstant.

Alltså ger $u_n(x, y) = D_n \cos(\pi n x)(e^{\pi n y} - e^{-\pi n y})$ en lösning för $n = 1, 2, \ldots$

Vi väljer nu konstanter D_n så att

$$u(x, y) = D_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\pi n x)(e^{\pi n y} - e^{-\pi n y})$$

även uppfyller randvillkoret $u(x, 1) = x$; om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x)$ är Fourierserien till den jämna utvidningen av $f(x) = x$, till intervallet $[-1, 1]$, får vi $D_0 = a_0/2$, och, för $n > 0$, att $D_n = a_n/((e^{\pi n} - e^{-\pi n})$ där $a_n = 2\int_0^1 x \cos(\pi n x)\, dx$. Vi ser att $a_0 = 1$, och för $n > 0$ får vi

$$a_n/2 = \int_0^1 x \cos(\pi n x) dx = \left[\frac{x \sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\, dx$$

$$= \left[\frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\right]_0^1 = ((-1)^n - 1)/(\pi n)^2$$

Vi får

$$D_n = a_n/(e^{\pi n} - e^{-\pi n}) = 2 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2 (e^{\pi n} - e^{-\pi n})}$$

Svar: Lösningen ges av

$$u(x, y) = y/2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2 (e^{\pi n} - e^{-\pi n})} \cdot \cos(\pi n x) \cdot (e^{\pi n y} - e^{-\pi n y}).$$

---

6. (4p) Betrakta systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^3 + ax^2 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 - a^3 \end{cases}$$

där a är en reell paramenter.

(a) Antag att $a \neq 0$. Finn alla kritiska punkter och klassificera dessa med avseende på stabilitet/instabilitet. (2p)

(b) Antag att $a = 0$. Finn alla kritiska punkter och klassificera dessa med avseende på stabilitet/instabilitet. (2p)

---

a: $y' = 0$ ger $x = a$, och insättning i $x' = -y^3 + ax^2 = 0$ ger $y = a$. Systemet har således precis en kritisk punkt för $(x, y) = (a, a)$.

Jacobimatrisen ges av

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} 2ax & -3y^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

och $J_{a,a} = \begin{pmatrix} 2a^2 & -3a^2 \\ 3a^2 & 0 \end{pmatrix}$ och vi finner att $\mathrm{trace}(J_{a,a}) = 2a^2 > 0$; alltså måste åtminstone ett av egenvärdena ha positiv realdel; eftersom $|J_{a,a}| = 9a^4 > 0$ kan reella egenvärden med olika tecken uteslutas.

Svar: de kritiska punkterna (a, a) är instabila för alla $a \neq 0$.

b: om $a = 0$ har systemet precis en kritisk punkt, nämligen $(x, y) = (0, 0)$. Dock, då $J_{0,0}$ är nollmatrisen ger linjäriseringstestet ingen information.

Med fasplanmetoden får vi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3}{y^3}$$

som är separabel; vi får $y^3 dy = -x^3 dx$ som efter integration av båda sidorna ger $y^4 = -x^4 + c$, eller $x^4 + y^4 = c$ (med $c \geq 0$). Derivering och insättning i $x' = -y^3$ samt $y' = x^3$ ger att alla lösningskurvor $(x(t), y(t))$ måste ligga på kurvan $x^4+y^4 = c$ (eftersom $\frac{d}{dt}(x^4 + y^4) = 4(x^3x' + y^3y') = 4(-x^3y^3 + x^3y^3) = 0.$)

För $c = 0$ får vi den stationära lösningen $x(t) = y(t) = 0$ för alla t; för $c > 0$ måste vi ha $x(t)^4 + y(t)^4 = c$, och alla sådana lösningar måste alltså ligga på den slutna och begränsade kurvan $x^4 + y^4 = c$ (för alla t) och i synnerhet gäller $|x(t)| \leq c^{1/4}$ och $|y(t)| \leq c^{1/4}$ för alla t.

Svar: Den kritiska punkten $(0, 0)$ är stabil.

---

7. Låt $f(x), g(x)$ vara kontinuerliga funktioner på $(-\infty, \infty)$. Visa, utan att använda existenssatsen, att begynnelsevärdesproblemet

$$y' + f(x)y = g(x), \quad y(0) = 0$$

har en lösning som existerar på hela $(-\infty, \infty)$.

Låt $I(x) = e^{\int f(x)dx}$ vara den integrerande faktorn, och notera att $I(x) > 0$ för alla x samt att $I(x)$ är kontinuerligt deriverbar eftersom $\int f(x)dx$ är kontinuerligt deriverbar. Standardomskrivningen ger

$$\frac{d}{dx}\left(yI(x)\right) = g(x)I(x)$$

som efter integrering ger $yI(x) = \int (g(x)I(x))dx + C$, eller $y = H_C(x)$ om vi låter

$$H_C(x) = \frac{\int (g(x)I(x))dx + C}{I(x)}$$

Om vi tar $C = 0$ ser vi att $y(0) = H_0(0) = 0$, och att $H_0(x)$ är en kontinuerligt deriverbar funktion.

Vi får även (notera att $I'(x) = f(x)I(x)$)

$$y' = \frac{g(x)I(x)^2 - (\int g(x)I(x)dx)I'(x)}{I(x)^2} = g(x) - \frac{(\int g(x)I(x)dx))f(x)}{I(x)}$$

som ger

$$y' + f(x)y = g(x) - \frac{(\int g(x)I(x)dx))f(x)}{I(x)} + f(x)\frac{\int g(x)I(x)dx}{I(x)} = g(x)$$

Således är $y(x) = H_0(x)$ en lösning till differentialekvationen som även uppfyller $y(0) = 0$.

Formelblad om Fourierserier

En Fourierserie för en funktion f definierad på intervallet $(-p, p)$ ges av

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

där

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx,$$

och

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx.$$

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \tag{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \tag{4}$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \tag{5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \tag{6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \tag{9}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \tag{11}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \left|\frac{a+x}{b+x}\right|, \ a \neq b \tag{14}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \tag{15}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{16}$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \tag{19}$$

$$\int x\sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \tag{20}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{21}$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{22}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} \tag{23}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{24}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln \left[\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right] \tag{25}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{26}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}\, dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln \left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{27}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\, dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln \left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{28}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{29}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{30}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}\left(x^2 \pm a^2\right)^{3/2} \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{32}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \tag{33}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \tag{34}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{35}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{36}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln \left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx^{+}c)}\right| \tag{37}$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}}\Big(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times \left(-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)\right) + 3(b^3-4abc) \ln \left|b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|\Big) \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{39}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln \left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{40}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \tag{41}$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x \tag{42}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2}\left(\ln ax\right)^2 \tag{43}$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \tag{44}$$

$$\int \ln(x^2+a^2)\, \mathrm{d}x = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \tag{45}$$

$$\int \ln(x^2-a^2)\, \mathrm{d}x = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \tag{46}$$

$$\int \ln\left(ax^2+bx+c\right) dx = \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x\right) \ln\left(ax^2+bx+c\right) \tag{47}$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) \ln(ax+b) \tag{48}$$

$$\int x \ln\left(a^2-b^2x^2\right) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) \ln\left(a^2-b^2x^2\right) \tag{49}$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{50}$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax} dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\operatorname{erf}\left(i\sqrt{ax}\right), \quad \text{where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt \tag{51}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x \tag{52}$$

$$\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \tag{53}$$

$$\int x^2e^x dx = \left(x^2-2x+2\right)e^x \tag{54}$$

$$\int x^2e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \tag{55}$$

$$\int x^3e^x dx = \left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x \tag{56}$$

$$\int x^ne^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, \mathrm{d}x \tag{57}$$

$$\int x^ne^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n,-ax], \quad \text{where } \Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{58}$$

$$\int e^{ax^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{59}$$

$$\int e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{60}$$

$$\int xe^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{61}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{62}$$

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \tag{63}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{64}$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \;\; {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{65}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{66}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \tag{67}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{68}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{69}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{70}$$

$$\int \cos ax \sin bx dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{71}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{72}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \tag{73}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{74}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \tag{75}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{76}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{77}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \tag{78}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \tag{79}$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{80}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \tag{81}$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{82}$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \tag{83}$$

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| \tag{84}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \tag{85}$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \tag{86}$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \tag{87}$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{88}$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \tag{89}$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln|\csc x - \cot x| \tag{90}$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \tag{91}$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln|\tan x| \tag{92}$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \tag{93}$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \tag{94}$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + \left(x^2 - 2\right) \sin x \tag{95}$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3} \sin ax \tag{96}$$

$$\int x^n cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)\right] \tag{97}$$

$$\int x^n cos ax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{98}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \tag{99}$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{100}$$

$$\int x^2 \sin x dx = \left(2 - x^2\right) \cos x + 2x \sin x \tag{101}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \tag{102}$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n \left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{103}$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \tag{104}$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \tag{105}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \tag{106}$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \tag{107}$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \tag{108}$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \tag{109}$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \tag{110}$$

$$\int e^{ax} \cosh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2}[a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{111}$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \tag{112}$$

$$\int e^{ax} \sinh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2}[-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{113}$$

$$\int e^{ax} \tanh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1\left[1 + \dfrac{a}{2b}, 1, 2 + \dfrac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] - \dfrac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1\left[\dfrac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \tag{114}$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \tag{115}$$

$$\int \cos ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx\right] \tag{116}$$

$$\int \cos ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx\right] \tag{117}$$

$$\int \sin ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx\right] \tag{118}$$

$$\int \sin ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx\right] \tag{119}$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a}\left[-2ax + \sinh 2ax\right] \tag{120}$$

$$\int \sinh ax \cosh bx dx = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx\right] \tag{121}$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\dfrac{1}{s}$	(1)
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(2)
$\mathcal{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	(3)
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)
$\delta(t)$	1	(5)
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	(6)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) -$	
	$\cdots - f^{(n-1)}(0)$	(9)
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	(11)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(12)
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	(13)
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	(14)
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	(15)
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	(16)
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	(17)
$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	(18)
$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	(19)
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	(20)
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(21)
$e^{at}\sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	(22)
$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	(23)
$e^{at}\sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$	(24)
$e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	(25)
$t\sin kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	(26)
$t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	(27)
$t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	(28)
$t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$	(29)
$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan \dfrac{a}{s}$	(30)
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
$\text{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)