Lösningsförslag till Tentamen, SF1633, Differentialekvationer I
den 19 december 2016 kl 8:00 - 13:00.

För godkänt (betyg E) krävs tre godkända moduler från del I. Varje moduluppgift består av tre frågor. För att bli godkänd på modulen krävs rätt svar på minst två av dessa frågor. Den som har godkänd modul från lappskrivning behöver inte göra motsvarande moduluppgift nedan. Den som har två godkända moduler, från lappskrivning eller tentamen, har möjlighet att komplettera.

Del II är avsedd för högre betyg. Varje uppgift i del II ger maximalt 4 poäng. För betyg A (respektive B, C, D) krävs 3 godkända moduler samt 15 (respektive 11, 7, 3) poäng på del II.

Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA: Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt. Samtliga svar ska vara på reell form.

Del I

Modul 1. I denna uppgift är a), b) och c) oberoende av varandra.

a) Bestäm de kritiska punkterna till ekvationen $dy/dx = y^2 - y$ samt klassificera dem med avseende på stabilitet/instabilitet.

b) Lös begynnelesevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

c) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $y' + 2y = 1$.

*Lösning:*a) Vi har att göra med en autonom exkvation. De kritiska punkterna ges av $0 = y^2 - y = y(y-1)$, dvs $y = 0$ och $y = 1$. Teckenanalys ger att $y(y-1) < 0$ för $0 < y < 1$, och $y(y-1) > 0$ för $y < 0$ och för $y > 1$. Således får vi följande faslinje:

$$- > - - (0) - < - - (1) - - > - - - -$$

Vi drar slutsatsen att $y = 0$ är en stabil kritisk punkt, och $y = 1$ är instabil.

b) Ekvationen är separabel och kan skrivas på formen $ydy = -xdx$. Integrering ger $y^2/2 = -x^2/2 + C$, som kan skrivas $y^2 = -x^2 + a$, där $a = 2C$ är en konstant. Begynnelsevillkoret ($y(0) = 1$) ger $1 = a$, dvs $a = 1$. Således har vi $y^2 = 1 - x^2$. Eftersom $y(0) = 1 > 0$ väljer vi den positiva roten, och får

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

c) Detta är en linjär ekvation. Ekvationen är redan på standardform, och den integrerande faktorn är $e^{\int 2dx} = e^{2x}$. Multiplicerar vi ekvationen med denna faktor fås $y'e^{2x} + ye^{2x} = e^{2x}$, som kan skrivas på formen

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right) = e^{2x}.$$

Integrering ger $ye^{2x} = e^{2x}/2 + C$, vilket kan skrivas $y = 1/2 + Ce^{2x}$. Här är C en godtycklig konstant.

Modul 2. Betrakta differentialekvationen

$$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 0, \quad x > 0.$$

a) Det är lätt att se att $y = x$ är en lösning till ekvationen ovan (behöver ej verifieras). Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen.

b) Bestäm två linjärt oberoende lösningar y_1, y_2 till ekvationen (på intervallet $x > 0$), samt verifiera att de verkligen är linjärt oberoende.

c) Det är lätt att se att $y_p(x) = 1$ är en lösning till den inhomogena ekvationen

$$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 2x + 2, \quad x > 0.$$

Bestäm den lösning till denna inhomogena ekvation som uppfyller begynnelsevillkoren $y(1) = 0, y'(1) = 1$.

Lösning: a) Vi ser att $y_1 = x$ är en lösning. Vi använder reduktion av ordning, dvs vi söker en lösning y på formen $y = uy_1 = ux$ där $u = u(x)$ ska bestämmas. Derivering ger $y' = u + u'x$ och $y'' = 2u' + u''x$. Insättning i ekvationen ger (efter lite förenkling) $x^3u'' - 2x^3u' = 0$. Eftersom $x > 0$ kan vi dividera med x^3 och får då $u'' - 2u' = 0$. Låt $v = u'$. Då kan denna ekvation skrivas $v' - 2v = 0$. Lösningen till denna ekvation är $v = Ce^{2x}$, vilket ger oss $u = c_1e^{2x} + c_2$ där c_1, c_2 är konstanter. Således är

$$y = ux = c_1xe^{2x} + c_2x$$

en lösning till ekvationen för varje val av konstanterna c_1, c_2. Från teorin vet vi att detta måste vara den allmänna lösningen. (Eftersom $y = x$ och $y = xe^{2x}$ är linjärt oberoende på intervallet $x > 0$, se b) nedan, så vet vi att den allmänna lösningen måste vara $y = c_1xe^{2x} + c_2x$.)

b) Vi såg ovan att $y_1 = x$ och $y_2 = xe^{2x}$ är två lösningar till ekvationen. Vi visar nu att de är linjärt oberoende på intervallet $x > 0$ genom att verifiera att Wronskideterminanten är skild från noll där. Vi har

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & xe^{2x} \\ 1 & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = 2x^2e^{2x} \neq 0, \quad x > 0.$$

c) Eftersom $y_h = c_1xe^{2x} + c_2x$ är den allmänna lösning till den motsvarande homogena ekvationen, och $y_p(x) = 1$ är en partikulärlösning, vet vi att den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är

$$y = y_h + y_p = c_1xe^{2x} + c_2x + 1.$$

Begynnelesevillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 = y(1) =& c_1e^2 + c_2 + 1 \\ 1 = y'(1) =& c_1(2e^2 + e^2) + c_2 \end{aligned}$$

som ger oss $c_1 = e^{-2}$ och $c_2 = -2$. Således är

$$y = xe^{2x-2} - 2x + 1$$

den sökta lösningen till begynnelsevärdesproblemet.

Modul 3. Låt
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

a) Beräkna f:s Fourierkoefficienter.

b) Använd resultatet från a) för att bestämma f:s Fourierserie.

c) Skissa Fourierseriens summa på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. Motivera svaret genom att referera till lämplig sats.

*Lösning:*a) Eftersom funktionen är definierad på intervallet $(-\pi, \pi)$ så ges Fourierkoefficienterna av följande:
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi dx = \pi$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_0^{\pi}\cos(nx)dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \sin(n\pi) = 0 \text{ för alla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n}.$$

b) Fourierserien ges av
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

Eftersom $1-(-1)^n = 0$ för alla jämna n kan serien skrivas
$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}\sin((2k+1)x).$$

c) Eftersom f och f' är styckvis kontinuerliga så vet vi från sats 11.2.1 att Fourierserien konvergerar mot $(f(x+)+f(x-))/2$ i varje punkt $-\pi < x < \pi$. Vidare vet vi att Fourierserien är 2π-periodisk. Eftersom f är kontinuerlig i intervallet $(0, \pi)$ och $(-\pi, 0)$, så följer att Fourierseriens summa är $f(x) = \pi$ för $0 < x < \pi$, och $f(x) = 0$ för $-\pi < x < 0$. Vidare, 2π-perodiciteten ger att summan är π för $-2\pi < x < -\pi$ och $2\pi < x < 3\pi$, och 0 för $-3\pi < x < -2\pi$ och $\pi < x < 2\pi$. Slutligen, i punkterna $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ så är seriens summa $(\pi + 0)/2 = \pi/2$. Rita figur.

Del II

4. Lös integralekvationen
$$y(t) + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin 2t.$$

Lösning: Vi använder Laplacetransform. Notera att vi har att göra med en faltning i vänsterledet, nämligen faltningen av $y(t)$ och $g(t) = t$. Transformering ger
$$Y(s) + \frac{1}{s^2}Y(s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Detta ger

$$Y(s) = \frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{8}{3(s^2+4)} - \frac{2}{3(s^2+1)}.$$

Inverstransform ger nu

$$y(t) = \frac{4}{3}\sin 2t - \frac{2}{3}\sin t.$$

5. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 5x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

a) Bestäm en fundamentalmatris till systemet. **(2p)**
b) Lös systemet under begynnelsevillkoret $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$. **(1p)**
c) Är den kritiska punkten $(0,0)$ stabil eller instabil? **(1p)**

*Lösning:*a) Om vi låter

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

så kan systemet skrivas $X' = AX$. Matrisen A har egenvärdena $\lambda = \pm 2i$. Vidare, $\overline{v} = \binom{5}{1-2i}$ är en (komplex) egenvektor svarande mot egenvärdet $\lambda = 2i$. Alltså vet vet vi att

$$X = \overline{v}e^{2it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it}$$

är en komplex lösning. Vidare vet vi att real- och imaginärdelen av denna lösning är två reella och linjärt oberoende lösningar. Vi har

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Således,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

är två linjärt oberoende (reella) lösningar. Detta betyder att

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 2t & 5\sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t & \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

är en fundamentalmatris till systemet.

b) Eftersom X_1 och X_2 är linjärt oberoende så kan den allmänna lösningen till systemet kan skrivas

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = X(0) = c_1\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.$$

Detta ger att $c_1 = 1/5$ och $c_2 = 1/10$. Således är

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\cos 2t\\ \cos 2t + 2\sin 2t\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\sin 2t\\ \sin 2t - 2\cos 2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2t + \frac{\sin 2t}{2}\\ \frac{\sin 2t}{2}\end{pmatrix}.$$

den sökta lösningen.

c) Eftersom systemet är linjärt, och matrisen A har rent imaginära egenvärden, så vet vi från teorin (Sats 10.2.1) att origo är ett centrum, dvs $(0,0)$ är stabil (men inte asymptotiskt stabil). Detta ser vi också från formen på den allmänna lösningen i b) ovan; samtliga lösningar är periodiska, och ju mindre $|c_1|, |c_2|$, desto närmare origo rör sig $(x_1(t), x_2(t))$.

6. I denna uppgift är a) och b) oberoende av varandra.
a) Betrakta det autonoma systemet **(2p)**

$$x' = 1 - y$$
$$y' = x^2 - y^2.$$

Bestäm samtliga kritiska punkter, samt avgör om de är stabila eller instabila.

b) Genom att skiva om ekvationen $x'' + 2x^3 = 0$ som ett första ordningens autonomt system, använd lämplig metod för att avgöra om den kritiska punkten $(0,0)$ är stabil eller instabil. **(2p)**

Lösning: a) De kritiska punkterna ges av

$$1 - y = 0$$
$$x^2 - y^2 = 0.$$

Första ekvationen ger $y = 1$. Insatt i den andra ekvationen fås $x^2 - 1 = 0$ vilket ger $x = \pm 1$. Alltså, $(\pm 1, 1)$ är de två kritiska punkterna.

Vi undersöker stabiliteten hos dessa punkter med hjälp av linjarisering. Systemet ger oss Jacobianen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 2x & -2y\end{pmatrix}.$$

I den kritiska punkten $(1,1)$ har vi

$$J(1,1) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\lambda = -1 \pm i$. Eftersom realdelen är negativ så följer att den kritiska punkten $(1,1)$ är stabil.

I den kritiska punkten $(-1,1)$ har vi

$$J(-1,1) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$. Eftersom $\sqrt{3} - 1 > 0$ följer det att den kritiska punkten $(-1,1)$ är instabil.

b) Om vi låter $y = x'$ kan ekvationen skrivas $y' + 2x^3 = 0$, dvs $y' = -2x^3$. Vi får alltså systemet

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -2x^3. \end{aligned}$$

Linjarsering ger ingen information om stabiliteten i detta fall. Vi använder fasplanmetoden. Vi får

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{y}$$

vilket kan skrivas $ydy = -2x^3dx$. Integrering ger $y^2/2 = -x^4/2 + C$, dvs $x^4 + y^2 = 2C$ där C är en konstant. För varje val av $C > 0$ är detta slutna kurvor centrerade kring origo (och ju mindre $C > 0$, desto närmare origo är kurvan). Vi vet att lösningarna till systemet kommer att ligga på dessa kurvor. Således är $(0,0)$ ett centrum, dvs $(0,0)$ är en stabil kritisk punkt.

7. Använd separation av variabler för att lösa Laplace ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

på området $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ med randvillkoren

$$\begin{cases} u(0,y) = u(1,y) = \sin \pi y, & 0 \le y \le 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Lösning: Vi söker först lösningar till ekvationen på formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Insättning i ekvationen ger $X''Y + XY'' = 0$ vilket kan skrivas (vi dividerar med XY)

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'}{Y}.$$

Eftersom högerledet är oberoende av x, och vänsterledet är oberoende av y, så måste dessa två uttryck vara konstanta, dvs

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda$$

där λ är en konstant. Detta ger oss två ekvationer

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Om X och Y uppfyller dessa ekvationer så är alltså $u(x,y) = X(x)Y(y)$ en lösning till Laplace ekvation.

Vi fokuserar nu på det andra randvillkoret, dvs $u(x,0) = u(x,1) = 0, 0 < x < 1$. För att detta ska kunna vara uppfyllt för lösningar på formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$ som inte är identiskt noll, måste vi ha $Y(0) = Y(1) = 0$. Vi söker därför icke-triviala lösningar till randvärdesproblemet

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0.$$

För $\lambda \le 0$ har detta problem endast den triviala lösningen $Y(y) = 0$. Antag att $\lambda > 0$ och låt $\omega > 0$ vara sådant att $\omega^2 = \lambda$. Differentialekvationen ovan har då den allmänna lösningen

$$Y(y) = c_1 \cos \omega y + c_2 \sin \omega y.$$

Villkoret $Y(0) = 0$ ger att $c_1 = 0$. Villkoret $Y(1) = 0$ ger att $0 = c_2 \sin\omega$. Vi ser alltså att vi har icke-triviala lösningar, $Y(y) = c_2 \sin\omega y$, precis då $\sin\omega = 0$. Detta är uppfyllt då $\omega = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dvs då $\lambda = n^2\pi^2$. För dessa värden på λ har ekvationen $X'' - \lambda X = 0$ den allmänna lösningen

$$X(x) = d_1 e^{n\pi x} + d_2 e^{-n\pi x}.$$

Alltså, för varje $n = 1, 2, 3$ är således

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = (a_1 e^{n\pi x} + a_2 e^{-n\pi x}) \sin(n\pi y)$$

en lösning till Laplace ekvation som uppfyller $u(x, 0) = u(x, 1)$.

Vi fokuserar du på det första randvillkoret, dvs $u(0, y) = u(1, y) = \sin\pi y$. Vi undersöker om det finns en lösning på formen ovan som också uppfyller detta villkor. Från randvillkoret ser vi att det verkar rimligt att sätta $n = 1$, dvs vi undersöker om vi kan välja konstanterna a_1 och a_2 så att

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = (a_1 e^{\pi x} + a_2 e^{-\pi x}) \sin(\pi y)$$

uppfyller $u(0, y) = u(1, y) = \sin\pi y$. I så fall är detta den sökta lösningen. Vi får villkoren

$$\begin{aligned} \sin\pi y =& u(0, y) = (a_1 + a_2) \sin\pi y \\ \sin\pi y =& u(1, y) = (a_1 e^{\pi} + a_2 e^{-\pi}) \sin\pi y. \end{aligned}$$

dvs $a_1 + a_2 = 1$ och $a_1 e^{\pi} + a_2 e^{-\pi} = 1$. Detta ger $a_1 = (1 - e^{-\pi})/(e^{\pi} - e^{-\pi})$ och $a_2 = (e^{\pi} - 1)/(e^{\pi} - e^{-\pi})$. Således är

$$u(x, y) = \left(\frac{1 - e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} e^{\pi x} + \frac{e^{\pi} - 1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} e^{-\pi x} \right) \sin(\pi y)$$

den sökta lösningen till det givna problemet.

8. Låt y_1, y_2 vara två linjärt oberoende lösningar till ekvationen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{1}$$

a) Visa att **(3p)**

$$\begin{aligned} P(x) =& -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)} \\ Q(x) =& \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

där $W(y_1, y_2)$ är Wronskideterminanten av y_1 och y_2.
b) Bestäm en ekvation på formen (1) som har $y_1 = x$ och $y_2 = x^3$ som lösningar då $x > 0$. **(1p)**

Lösning: a) Att y_1 och y_2 är lösningar betyder att vi har

$$\begin{aligned} y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \end{aligned}$$

Vi betraktar detta (för fixerat x) som ett linjärt ekvationssystem, där $P(x)$ och $Q(x)$ är de obekanta. Eftersom det är givet att y_1 och y_2 är linjärt oberoende så vet vi att Wronskideterminanten $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$ på I. Om vi nu multiplicerar första ekvationen med y_2 och den andra med $-y_1$, och adderar ekvationerna fås

$$0 = y_1''y_2 + P(x)y_1'y_2 - y_2''y_1 - P(x)y_2'y_1$$

vilket ger

$$P(x) = \frac{y_1y_2'' - y_2y_1''}{y_1'y_2 - y_2'y_1}.$$

Vi noterar att nämnaren är $-W(y_1, y_2)$, så vi kan allstå skriva

$$P(x) = -\frac{y_1y_2'' - y_2y_1''}{W(y_1, y_2)}.$$

På samma sätt, genom att multiplicera första ekvationen med y_2' och den andra med $-y_1'$, och addera ekvationerna får vi

$$0 = y_1''y_2' + Q(x)y_1y_2' - y_2''y_1' - Q(x)y_2y_1'$$

vilket ger

$$Q(x) = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{y_1y_2' - y_2y_1'} = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{W(y_1, y_2)}.$$

b) Vi bestämmer P och Q genom att använda formlerna från a), med $y_1 = x$ och $y_2 = x^3$. Vi har $W(y_1, y_2) = x(3x^2) - x^3(1) = 2x^3 \neq 0$ för $x > 0$, så

$$P(x) = -\frac{x \cdot 6x}{2x^3} = -\frac{3}{x}$$

$$Q(x) = \frac{1 \cdot 6x}{2x^3} = \frac{3}{x^2}.$$

Alltså, vi får ekvationen

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0.$$