Institutionen för matematik, KTH
Maria Saprykina, Serguei Shimorin

SF1633, Differentialekvationer I, 18 augusti 2015
Lösningsförslag

För godkänd (betyg E) krävs tre godkända moduler från del I. Varje moduluppgift innehåller tre frågor. För godkänd modul krävs rätt svar på minst två frågor. Den som har två godkända moduler har möjlighet att komplettera till godkänd.

Del II är avsedd för högre betyg. Varje uppgift i del II omfattar 4 poäng. För betyg A (respektivt B, C, D) krävs 3 godkända moduler samt 15 (respectivt 11, 7, 3) poäng på del II.

Del I

MU 1. En termometer tas inifrån ett rum och ut där utetemperaturen är $+2°C$. Antar att Newtons avsvalningslag gäller d v s att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan termometern och omgivningen. Efter 10 minuter visar termometern $+8°C$ och efter 20 minuter visar termometern $+4°C$.

(a) Bestäm ekvation som uttrycker termometerns temperatur som funktion av tiden. Lös den erhållna ekvationen i allmän form.

(b) Bestäm ursprungliga rumstemperatur samt temperaturen som visas av termometern efter 30 minuter.

(c) Utgående från lösningen erhållen i (a), förklara varför temperaturen som visas av termometern stabiliseras efter tillräckligt lång tid. Vad är stabiliserade temperaturen?

Lösning.

(a) Vi betecknar med $T(t)$ temperaturen som visas av termometern efter t minuter. Avsvalningslagen formuleras då som formeln

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-2),$$

där $k > 0$ är någon konstant. Denna ekvation kan lösas antingen som en linjär ekvation eller som en separabel ekvation. Lösningen i allmän form är $T(t) = 2 + Ce^{-kt}$.

(b) Insättning av värdena $T(10) = 8$ samt $T(20) = 4$ ger oss ekvationer

$$2 + Ce^{-10k} = 8; \quad 2 + Ce^{-20k} = 4.$$

Vi avgör att $e^{10k} = 3$ och $C = 18$. Detta ger oss ursprungliga rumstemperatur $T(0) = 2 + 18 = 20°C$ och $T(30) = 2 + 18 \cdot \frac{1}{27} = 2\frac{2}{3} = 2.666\ldots° C$.

(c) Formeln $T(t) = 2 + Ce^{-kt}$ erhållen i (a) visar att $T(t) \to 2$ då $t \to +\infty$ eftersom $\lim_{t\to+\infty} e^{-kt} = 0$. Detta visar att temperaturen stabiliseras till utetemperatur $+2°C$ efter tillräckligt lång tid.

MU 2. Undersök system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet.

(b) Origo är en kritisk punkt för systemet. Vilken typ av fasporträtt har systemet nära origo? Är origo en stabil eller instabil kritisk punkt? (Du behöver inte rita någon bild)

(c) Finns det någon *nollskild* lösning som uppfyller $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = 0$? Ange en sådan lösning om den finns.

Lösning.

(a) Vi börjar med att bestämma egenvärdena och egenvektorer av matrisen A. Karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9.$$

Den har rötter $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -3$. Det är egenvärdena av matrisen.

Den första egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (den som hör till $\lambda_1 = 3$) uppfyller ekvation $(A - 3I)\mathbf{v}_1 = 0$ vilket ger oss ekvation $-2a + 2b = 0$ (den andra ekvation för a, b är samma). Vi får $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och detta ger oss den första lösningen till ursprungliga systemet

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{3t}\mathbf{v}_1 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den andra egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (den som hör till $\lambda_2 = -3$) uppfyller ekvation $(A + 3I)\mathbf{v}_2 = 0$ vilket ger oss ekvation $4c + 2d = 0$ (den andra ekvation för c, d är samma). Vi får $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och detta ger oss den andra lösningen till ursprungliga systemet

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{-3t}\mathbf{v}_2 = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen är godtycklig linjär kombination av $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Egenvärdena erhålna i (a) är reella och de har olika tecknar. Detta ger oss att origo är en sadelpunkt. Den är instabil.

(c) Vi observerar att lösningen $\mathbf{X}_2(t)$ erhållen i (a) uppfyller $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}_2(t) = 0$. Detta ger oss nollskild lösning

$$e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

MU 3. En funktion $y = 3x + 1$ är definierad på intervallet $-1 < x < 1$. Funktionen utvecklas i en fourierserie på detta intervall.

(a) Vad är utseendet av erhållna fourierserien? Bestäm koefficienten a_0 (övriga koefficienter behöver inte beräknas).

(b) Vad är summan av erhållna fourierserien på intervallet $1 < x < 3$? Vad är summan i punkten $x = 3$?

(c) För erhållna fourierserien, visa att alla koefficienter $a_n = 0$ då $n = 1, 2, \ldots$. Försök att undvika långa uträkningar!

Lösning.

(a) Intervallet har utseendet $(-1, 1)$ d v s $(-p, p)$ med $p = 1$. Detta ger oss Fourierserien

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x))$$

som har perioden $T = 2$.

Koefficienten a_0 är

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (3x + 1)\, dx = 2.$$

(b) Erhålna fourierserien har perioden 2. Om $1 < x < 3$, då är $-1 < x - 2 < 1$. Ursprungliga funktionen $y(x)$ i alla punkter i intervallet $(-1, 1)$ är kontinuerlig och deriverbar och konvergenssatsen ger oss att fourierserien i punkten $x - 2$ konvergerar till den ursprungliga funktionen. Vi får då för summan $F(x)$

$$F(x) = F(x - 2) = 3(x - 2) + 1 = 3x - 5$$

i intervallet $1 < x < 3$.

I punkten $x = 3$ den 2-periodiska fotsättningen av $y(x)$ är diskontinuerlig. Konvergenssatsen ger oss att summan blir

$$F(3) = F(1) = \frac{y(1-) + y(1+)}{2} = \frac{y(1-) + y(-1+)}{2} = \frac{3 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot (-1) + 1}{2} = 1$$

(övergång från $y(1+)$ till $y(-1+)$ behövs för att hamna i intervallet $(-1, 1)$).

(c) Vi skriver om fourierserien som

$$F(x) - \frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x))\,.$$

Eftersom $a_0 = 1$, får vi på intervallet $-1 < x < 1$ ekvation

$$3x = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x))$$

d v s högerled är fourierserien av funktionen $y = 3x$. Eftersom den är udda, avgör vi att alla koefficienter $a_n = 0$ då $n = 1, 2, \ldots$.

Del II

(4p) **4.** Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = f(x), \quad \text{där} \quad f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $y(0) = 2$. Lösningen skall vara kontinuerlig och styckvis deriverbar på intervallet $x \geq 0$.

Lösning. Vi börjar med att lösa ekvationen på intervallet $(0, 1)$. Här har den formen

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 4x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x(y + 2).$$

Denna ekvation är separabel. Vi separerar variablerna och integrerar: $\int \frac{dy}{y+2} = \int 2x\,dx \Leftrightarrow \ln|y + 2| = x^2 + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Detta är ekvivalent med $y = Ce^{x^2} - 2$, $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$. Vi använder begynnelsevillkoret för att bestämma konstanten: $2 = y(0) = C - 2 \Leftrightarrow C = 4$. Alltså ges lösningen till begynnelsevärdesproblemet i intervallet $(0, 1)$ av $y(x) = 4e^{x^2} - 2$. Vi ska behöva beräkna

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = 4e - 2.$$

Vidare, löser ekvationen i intervallet $(1, \infty)$. Här har den formen $\frac{dy}{dx} = 2xy$. Ekvationen är separabel. Dess allmänna lösning ges av $\ln|y| = x^2 + C_1 \Leftrightarrow y = Ce^{x^2}$ ($C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$). Vi har:

$$\lim_{x \to 1^+} y(x) = Ce.$$

För att få en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemmet ovan, skall vi välja C så att $Ce = 4e - 2$. Slutligen, den kontinuerliga lösningen till BVP ges av

$$y(x) = \begin{cases} 4e^{x^2} - 2, & 0 < x \leq 1; \\ (4e - 2)e^{x^2 - 1}, & x > 1. \end{cases}$$

(4p) **5.** Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten. Det strömmande vattnet beskrivs av systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(2 + x); \\ \frac{dy}{dt} = (x - y)(1 - x - y). \end{cases}$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila. De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

Lösning. De kritiska punkterna sökes ur systemet

$$\begin{cases} y(2 + x) = 0; \\ (x - y)(1 - x - y) = 0. \end{cases}$$

Den första ekvationen är uppfylld om och endast om $y = 0$ eller $x = -2$.

För $y = 0$ blir den andra ekvationen $x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ eller } x = 1)$. Detta ger två kritiska punkter: $p_1 = (0, 0)$ och $p_2 = (1, 0)$.

För $x = -2$ blir den andra ekvationen $(-2-y)(3-y) = 0 \Leftrightarrow (y = -2$ eller $y = 3)$. Detta ger två kritiska punkter till: $p_3 = (-2,-2)$ och $p_4 = (-2,3)$.

För att undersöka stabiliteten, beräknar vi systemets Jakobian i de kritiska punkterna.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} y & x+2 \\ 1-2x & 2y-1 \end{pmatrix}.$$

I punkten $p_1 = (0,0)$ har vi: $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och har olika tecken. Denna punkt är instabil.

I punkten $p_2 = (1,0)$ har vi: $J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är komplexa (konjugerade) och har realdel $-\frac{1}{2} < 0$. Denna punkt är stabil.

I punkten $p_1 = (-2,-2)$ har vi: $J(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och negativa (-2 och -5). Denna punkt är stabil.

I punkten $p_1 = (-2,3)$ har vi: $J(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och positiva (3 och 5). Denna punkt är instabil.

6. Undersök systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2p) (a) Bestäm två linjärt oberoende lösningar till systemet.

(1p) (b) Ange en fundamentalmatris av systemet.

(1p) (b) Lös systemet tillsammans med begynnelsevillkor $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning.

(a). Matrisen A har egenvärden $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Vi får en egenvektor V ur relationen $(A-2I)V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, vi tar $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Motsvarande lösningen till systemet är $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Den andra lösningen har formen $X_2 = (Vt + P)e^{2t}$ där P är en lösning till $(A-2I)P = V$. Vi beräknar: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och tar $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den andra lösningen är alltså $X_2 = (Vt+P)e^{2t} = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

(b). En fundamentalmatris är $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$.

(c). Den allmänna lösningen är $X(t) = \Phi(t)C = C_1X_1 + C_2X_2$ (där $C = \binom{C_1}{C_2}$ är en vektor av konstanter). Vi söker en C sådan att $X(0) = \Phi(0)C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Med Φ som ovan har vi:

$$\Phi(0)C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger $C_1 = -2$, $C_2 = 3$. Den sökta lösningen är $X(t) = \begin{pmatrix} (3t-2)e^{2t} \\ (3t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$.

7. Funktioner $y_1(x) = 1+x^2$, $y_2(x) = x^2+2x^3$, $y_3(x) = 2+x^2+x^3$ löser inhomogena differentialekvationen $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$.

(1p) (a) Bestäm den allmänna lösningen till homogena ekvationen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

.

(3p) (b) Använd variation av parametrar metoden och lös annan inhomogen ekvation

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = x^2,$$

där $p(x)$ och $q(x)$ är samma som tidigare.

Lösning. (a). Observera att skillnaden mellan två lösningar till en linjär inhomogen ekvation är en lösning till den motsvarande homogena ekvationen. Om y_1, y_2 är lösningar till den inhomogena, har vi:

$$(y_1 - y_2)''(x) + p(x)(y_1 - y_2)'(x) + q(x)(y_1 - y_2)(x) =$$
$$(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) - y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)) = g(x) - g(x) = 0$$

Alltså är funktionerna $f(x) = y_2 - y_3 = x^3 - 2$ och $g(x) = y_3 - y_1 = x^3 + 1$ lösningar till den homogena ekvationen. Vidare, vet vi att lösningarna till en linjär homogen ekvation utgör ett vektorrum, dvs linjära kombinationer av sådana lösningar är lösningar. Låt $t_1(x) = \frac{1}{3}(g(x) - f(x)) = 1$, $t_2(x) = \frac{1}{3}(f(x) + 2g(x)) = x^3$; dessa två funktionerna är också lösningar till den homogena ekvationen.

De är linjärt oberoende: om vi antar att $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$ för alla x, dvs $C_1 + C_2x^3 = 0$ för alla x, så måste $C_1 = C_2 = 0$.

(b). Vi söker lösningen till den inhomogena ekvationen i (b) på formen $y(x) = u_1(x)t_1(x) + u_2(x)t_2(x)$ där $t_1(x)$, $t_2(x)$ är som ovan, $u_1(x)$, $u_2(x)$ är okända funktioner.

Deriveringen ger oss

$$y' = u_1't_1 + u_2't_2 + u_1t_1' + u_2t_2'.$$

Enligt variation av parametrar metoden sätter vi kravet att

$$0 = u_1't_1 + u_2't_2 = u_1' + x^3u_2'.$$

Detta ger oss $y' = u_1t_1' + u_2t_2'$.

Nästa deriveringen ger oss

$$y'' = u_1't_1' + u_2't_2' + u_1t_1'' + u_2t_2''.$$

Efter insättningen till inhomogena ekvationen $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = x^2$ försvinner alla termer med u_1 och u_2 eftersom t_1 och t_2 löser homogena ekvationen. Vi får

$$u_1't_1' + u_2't_2' = x^2$$

vilket ger oss $3x^2u_2' = x^2$ varav $u_2' = 1/3$. Kravet $u_1' + x^3u_2' = 0$ erhållet tidigare ger oss $u_1' = -x^3/3$.

Detta ger oss till slut:

$$u_1(x) = -\frac{1}{12}x^4 + C_1, \quad u_2(x) = \frac{1}{3}x + C_2.$$

Slutligen,

$$y(x) = u_1(x)t_1(x) + u_2(x)t_2(x) = -\frac{1}{12}x^4 + C_1\frac{1}{3}x^4 + \frac{x^4}{3} + C_2x^3 = \frac{1}{4}x^4 + C_1 + C_2x^3.$$

Observera att vi har fått den allmänna lösningen till ekvationen.

8. Operation J av integrering av en funktion definieras som $J(f) = g$, där

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

(1p) (a) Visa att operationen J kan tolkas som en faltning av f med en viss funktion, d v s $J(f) = f * h$. Ange funktionen h.

(3p) (b) Använd Laplacetransform och resultat av (a) för att härleda följande formeln: om man integrerar n gånger då är $J(J(\dots J(f)\dots) = g_n$, där

$$g_n(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Lösning. (a). Faltning av f och h definieras som $f * h(x) = \int_0^x f(x-t)h(t)\,dt$. Man verifierar enkelt att $f * h(x) = h * f(x) = \int_0^x f(t)h(x-t)\,dt$. Vi ser att för funktionen $h(x) = 1$ (för alla $x \geq 0$), $J(f)(x) = f * h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(b). På samma sätt, $J(J(f)) = f * h * h$ osv., och

$$g_n = J(J(\dots J(f)\dots) = f * h * \dots * h.$$

Vidare, Laplacetransformen uppfyller $\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{f_2\}$. Låt $F = \mathcal{L}\{f\}$. Från Beta, s. 315, får vi $\mathcal{L}\{h\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$. Vi har:

$$\mathcal{L}\{g_n\} = \mathcal{L}\{f * h * \dots * h\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{h\} \cdot \ldots \mathcal{L}\{h\} = \frac{F}{s^n}.$$

Från Beta, s. 315, får vi

$$g_n = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F}{s^n}\right) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$