Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer, den 16 december 2019 kl 08.00-12.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582) samt Kevin Schnelli (08-7907202).

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Tentalydelsen finns på svenska och engelska. Dina svar kan vara på svenska eller engelska. Formelblad finns efter den engelska tentalydelsen.

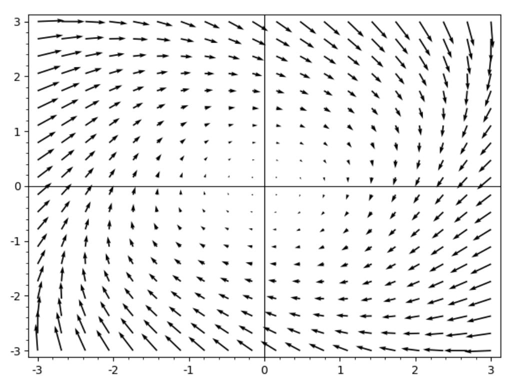
1. (4p) Para ihop nedanstående två-dimensionella system med motsvarande riktningsfält. Du behöver inte motivera ditt svar.

   (a) $\frac{dx}{dt} = \sin(x)\,, \quad \frac{dy}{dt} = \cos(y)$.

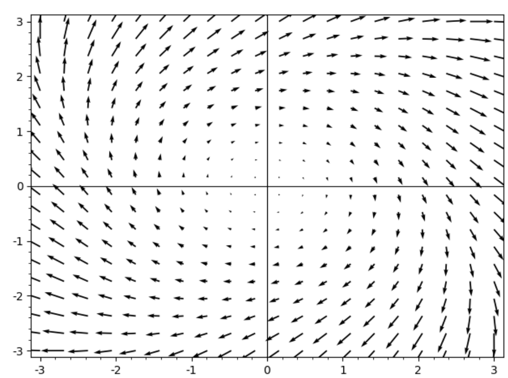
   (b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10}\,x^3 + y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{10}\,y^3 - x$.

   (c) $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{10}\,x^3 + y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{10}\,y^3 - x$.

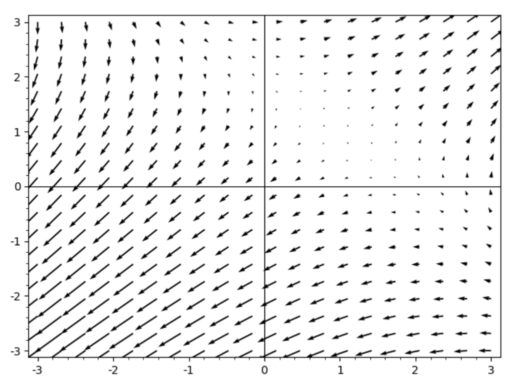
   (d) $\frac{dx}{dt} = x + 2\,y - 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2\,x + y - 3$.



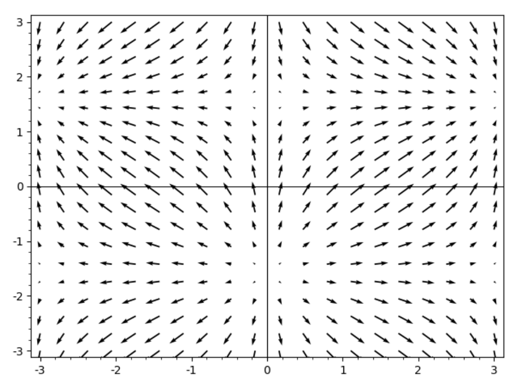
1



2



3



4

1C, 2B, 3D, 4A

2. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ får vi $\det(A-\lambda I) = (\lambda-3)^2$, dvs en dubbelrot. Lösningsrummet till $(A-3I)v = 0$ spänns upp av $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ och A är ej diagonaliserbar. En lösning till $(A-3I)v_2 = v_1$ ges av $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. En fundamental lösningsmängd till differentialekvationen ges av

$$X_1(t) = e^{3t}v_1, \quad X_2(t) = te^{3t}v_1 + e^{3t}v_2$$

och den sökta lösningen är på formen

$$X = \alpha X_1 + \beta X_2,$$

insätting av $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^t$ ger $\alpha = 1, \beta = 1$.

Svar: $X(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (4p) Bestäm den allmänna lösningen, för $x > 0$, till differentialekvationen

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^4e^x\,.$$

Vi skriver om den linjära ekvationen som $\frac{dy}{dx} - (2/x)y = x^3e^x$; den integrerande faktorn ges av $1/x^2$, och vi får

$$(y/x^2)' = xe^x$$

som efter integrering (tex mha tabell) ger

$$y/x^2 = xe^x - e^x + C.$$

Svar: den allmänna lösningen ges av $y = x^3e^x - x^2e^x + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$

4. (4p) Bestäm alla kritiska punkter till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^5 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 \end{cases}$$

och klassificera dem (om möjligt) m.a.p. stabilitet.

Kritiska punkter är lösningar till $y = x^5$ samt $x = y^2$; insättning ger $y^{10} - y = y(y^9 - 1) = 0$ som har lösningarna $y = 0, y = 1$. Alltså är $(x,y) = (0,0)$ samt $(x,y) = (1,1)$ kritiska punkter.

Jakobianen ges av $J = \begin{pmatrix} 5x^4 & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$.

$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ som har egenvärdena $\pm i$; vårt linjäriseringskriterium går då ingen information om punkten $(0,0)$.

$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; eftersom $\lambda_1\lambda_2 = \det(J_{(1,1)}) = -9$ måste egenvärdena vara reella med olika tecken. Punkten $(1,1)$ är således instabil.

---

5. (4p) Använd Laplacetransformer för att lösa ekvationen

$$y''(t) + 4y(t) = \delta(t-1) + \delta(t-3)\,,$$

med initialvillkor $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, där δ är Diracs delta-funktion.

Låt $Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s)$. Från differentialekvationen får vi

$$s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 4Y(s) = \mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-3s}\,.$$

Med $y'(0) = 0$ och $y(0) = 1$, har vi då

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}\mathrm{e}^{-s} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}\mathrm{e}^{-3s}\,.$$

Invers Laplacetransform ger nu

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2(t-1))\mathcal{U}(t-1) + \frac{1}{2}\sin(2(t-3))\mathcal{U}(t-3)\,,$$

där $\mathcal{U}(t-a)$ är Heavisides stegfunktionen. Vi kan skriver lösningen som

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2t) & \text{om } 0 \le t < 1\,, \\ \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2(t-1)) & \text{om } 1 \le t < 3\,, \\ \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2(t-1)) + \frac{1}{2}\sin(2(t-3)) & \text{om } 3 \le t\,. \end{cases}$$

---

6. *a.)* (2p) Betrakta funktionen $f(x) = x^2$, för $-1/2 \le x \le 1/2$, och $f(x+1) = f(x)$, för alla $x \in \mathbb{R}$. Bestäm Fourierserien till $f(x)$.

   b.) (2p) Bestäm konstanter a, b, så att $\{1, x, 3x^3 + bx + a\}$ är en ortogonal mängd av funktioner med avseende på skalarprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x\,.$$

---

a.) Funktionen är jämn, så utvecklar vi i en cosinus serie: Med $p = 1/2$, ger en dubbel partielintegration eller formelblad, för $n \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
a_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} x^2\cos(2\pi n x)\mathrm{d}x &= 2\int_{-1/2}^{1/2} x^2\left(\frac{\sin(2\pi n x}{2\pi n}\right)'\mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-1/2}^{1/2} (x^2)'\left(\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right)\mathrm{d}x + \left[x^2\left(\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right)\right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= -4\int_{-1/2}^{1/2} x\left(\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right)\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{-1/2}^{1/2} x\left(\frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= -4\int_{-1/2}^{1/2} (x)'\left(\frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^2}\right)\mathrm{d}x + 4\left[x\left(\frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^2}\right)\right]_{-1/2}^{1/2}
\end{aligned}
$$

där vi användade att $\sin(\pi n) = 0$. Nu har vi att $\int_{-1/2}^{1/2} 1\cdot\cos(2\pi n x)\mathrm{d}x = 0$, så att

$$
\begin{aligned}
a_n = 4\left[x\left(\frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^2}\right)\right]_{-1/2}^{1/2} &= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\frac{1}{2}\cos(\pi n) - \frac{1}{2}\cos(-\pi n)\right) \\
= \frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n)\,,
\end{aligned}
$$

om cosinus är jämn. Dessutom har vi $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Därför har vi

$$
a_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\,, \qquad (n \neq 0)\,.
$$

För $n = 0$, noterar vi att

$$
a_0 = 2\int_{-1/2}^{1/2} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{3}(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{6}\,.
$$

Fourierserien är därmed ges av

$$
f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(2\pi n x)\,.
$$

b.) Mängden är ortogonal om funktionerna är parvis ortogonala. Därför måste gälla

$$
\int_{-1}^{1} 1\cdot(3x^3 + bx + a)\mathrm{d}x = 0\,,
$$

och

$$
\int_{-1}^{1} x\cdot(3x^3 + bx + a)\mathrm{d}x = 0\,.
$$

Första integralen ger

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot(3x^3+bx+a)\mathrm{d}x = \Big(\frac{3}{4}x^4+\frac{b}{2}x^2+ax\Big)\Big|_{x=-1}^{1} = 2a\,,$$

den andra ger

$$\int_{-1}^{1} x\cdot(3x^3+bx+a)\mathrm{d}x = \Big(\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}bx^3+\frac{a}{2}x^2\Big)\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{6}{5}+\frac{2}{3}b\,.$$

Därför får vi $a=0$ och $b=-\frac{9}{5}$.

---

7. (4p) Lös vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<2, \quad t\geq 0$$

med randvillkor

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=2}=0,$$

samt

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \quad 0\leq x\leq 2,$$

där

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{för } 0\leq x\leq 1/2,\\ 0 & \text{för } 3/2\leq x\leq 2,\\ 1 & \text{för } 1/2<x<3/2.\end{cases}$$

Ansatsen $u(x,t)=X(x)T(t)$ ger

$$T''/T = X''/X = -\lambda$$

Om $\lambda=0$ får vi $X=c_1+c_2x$, och randvillkoren $X(0)=X(2)=0$ ger trivial lösning.

Även $\lambda<0$ ger trivial lösning (om $X=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}$ och $\alpha\neq 0$ ger $X(0)=X(2)$ att $c_1=c_2=0$.)

Om $\lambda>0$ får vi

$$X=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Randvillkoret $X(0)=0$ ger $c_2=0$; $X(2)=0$ ger att $c_1\sin\sqrt{\lambda}2=0$ och således ger $\lambda_n=(\pi n/2)^2$ lösningen $x_n(x)=\sin\frac{\pi n}{2}x$, för n ett heltal.

Ekvationen $T''/T=-\lambda_n$ ger nu lösningen

$$T=D_1\sin\frac{\pi n}{2}t+D_2\cos\frac{\pi n}{2}t$$

och randvillkoret $T'(0)=0$ ger $D_1=0$.

Vi får att $u_n(x,t)=\sin(\frac{\pi n}{2}x)\cdot\cos(\frac{\pi n}{2}t)$ är en lösning till den homogena delen av systemet. För att lösa randvillkoret $u(x,0)=f(x)$ gör vi en udda utvidgning av f till $[-2,2]$ och finner motsvarande sinus-serie.

Vi får

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \int_{0}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \int_{1/2}^{3/2}\sin\frac{\pi n x}{2}dx$$

$$= \frac{2}{\pi n}(\cos\frac{\pi n}{4} - \cos\frac{3\pi n}{4}) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\frac{2\sqrt{2}}{\pi n}, & \text{om } n \text{ är udda} \\ 0 & \text{om } n \text{ är jämnt} \end{cases}$$

Alltså ges en lösning av

$$u(x,t) = \sum_{n=0, n \text{ udda}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2}\frac{2\sqrt{2}}{\pi n}\sin(\frac{\pi n}{2}x)\cdot\cos(\frac{\pi n}{2}t)$$

. . . .

Lycka till!

. . . .