Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1633, Differentialekvationer

Tentamen, onsdagen den 7 januari 2014. Lösningsförslag.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är formelsamlingen BETA.

För godkänd (betyg E) krävs tre godkända moduler från del I. Varje moduluppgift innehåller tre frågor. För godkänd modul krävs rätt svar på minst två frågor. Den som har två godkända moduler har möjlighet att komplettera till godkänd.

Del II är avsedd för högre betyg. Varje uppgift i del II omfattar 4 poäng. För betyg A (respektivt B, C, D) krävs 3 godkända moduler samt 15 (respektivt 11, 7, 3) poäng på del II.

Del I

Moduluppgift 1. En kall vinterdag tas en termometer in i rummet från utsida av fönstret. Rumstemperatur är $+20°C$. Antar att Newtons uppvärmningslag gäller d v s att uppvärmningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan omgivningen och termometern.

1) Bestäm differentialekvation för termometerns temperatur $T(t)$ efter t minuter. Ekvationen får innehålla en obekant konstant. Lös erhållna ekvationen i allmän form.

2) Antar att utetemperatur är $-5°C$ och efter 10 minuter visar termometern $+15°C$. Vad visar termometern efter 20 minuter?

3)Förklara varför termometerns temperatur blir samma som rumstemperatur efter tillräckligt lång tid.

Lösning.

(1) Från uppvärmningslag härleder vi att derivatan $\frac{dT}{dt}$ är proportionell mot difference $20 - T(t)$ vilket ger oss differentialekvation

$$\frac{dT}{dt} = k(20 - T(t)),$$

där k är någon positiv konstant. Det är en linjär ekvation. Vi skriver den om som

$$\frac{dT}{dt} + kT = 20k,$$

multiplicerar med integrerande faktorn $\mu(t) = e^{kt}$ och vi får

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}T(t)\right) = 20ke^{kt}.$$

Integrering ger oss $e^{kt}T(t) = 20e^{kt} + C$ och vi får lösningen i allmän form

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt}.$$

(2) Begynnelsevillkor $T(0) = -5$ ger oss $C = -25$ och vi får $T(t) = 20 - 25e^{-kt}$. Insättning att villkor $T(10) = 15$ ger oss $e^{-10k} = 1/5$. Vi får då $e^{-20k} = 1/25$ vilket ger oss $T(20) = 20 - 25/25 = 19°C$.

(3) Vi utgår från formeln $T(t) = 20 + Ce^{-kt}$. Efter tillräckligt lång tid d v s då $t \to \infty$ får vi att $e^{-kt} \to 0$ eftersom k är positiv. Detta ger oss att $T(t)$ konvergerar mot $20°C$ vilket är rumstemperatur.

Moduluppgift 2. Undersök autonomt system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = -2x - xy; \\ y' = -8y + xy. \end{cases}$$

1) Bestäm alla kritiska punkter till systemet;

2) För varje kritisk punkt, ange om den är stabil eller instabil;

3) Ange även typ av fasporträtt av systemet nära varje kritisk punkt (Du behöver inte rita någon bild).

Lösning.

(1) Kritiska punkter motsvarar till både högerled är noll. Vi får ekvationer

$$\begin{cases} -2x - xy = 0 \\ -8y + xy = 0. \end{cases}$$

Lösningarna till dem är $x = y = 0$ eller $x = 8$, $y = -2$. Kritiska punkter är $(0,0)$ och $(8,-2)$.

(2),(3). Vi undersöker kritiska punkter m h av linearisering. Jakobimatris av systemets högerled är

$$J = \begin{pmatrix} -2-y & -x \\ y & -8+x \end{pmatrix}.$$

I punkten $(0,0)$ matrisen blir

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärdena $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = -8$. Två reella negativa egenvärdena visar att punkten $(0,0)$ är en asymptotiskt stabil nod.

I punkten $(8,-2)$ Jakobimatris blir

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm 4$. Två reella egenvärdena med olika teknar visar att punkten $(8,-2)$ är en sadelpunkt. Den är instabil.

Moduluppgift 3. Funktionen $f(x) = \cos x$ definierad för x i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ utvecklas i sinusfourierserien på detta intervall (d v s intervalets längd $\frac{\pi}{2}$ är halvperioden av fourierserien).

1)Hur ser ut erhållna fourierserien? Du behöver inte räkna koefficienter.

2) Rita graf av summa av erhållna fourierserien på hela reella axeln. Grafen skall omfatta minst tre perioder.

3) Bestäm summa av erhållna fourierserien i punkter $x = \frac{3\pi}{4}$ samt $x = -\pi$.

Lösning.

(1) Hela perioden av serien är $T = \pi$. Enligt uppgiften innehåller serien endast sin-termer. Detta ger oss serien i form

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2kx).$$

(2) För att rita grafen utgår man från funktionen $y = \cos x$ på intervallet $(0, \pi/2)$. Därefter speglar man grafen m av på origo för att få en udda funktion som motsvarar sinus-fourierserier. Till slut förskjuter man erhållen kurva periodiskt längst x-axeln med perioder $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ o s v.

(3) Vi har p g av periodiska egenskaper av $S(x)$ och egenskap att $S(x)$ är en udda funktion

$$S(\frac{3\pi}{4}) = S(-\frac{\pi}{4}) = -S(\frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

I punkten $x = -\pi$ summan är diskontinuerlig. Vi får enligt egenskaper av fourierserier

$$S(-\pi) = S(0) = \frac{S(0+) + S(0-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Del II

4. Lös begynnelsevärdesproblem i intervallet $0 \le x < \pi/2$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \tan x \cdot y(x) = f(x); \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Här är

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \sqrt{2}, \text{ om } 0 \le x < \frac{\pi}{4}; \\ 0 \text{ , om } \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Lösning.

Vi börjar med ekvation

$$\frac{dy}{dx} - \tan x \cdot y(x) = \frac{1}{\cos x} - \sqrt{2}; \qquad y(0) = 0$$

på intervallet $[0, \pi/4)$. Det är en linjär ekvation. Integrerande faktorn till den är

$$\mu(x) = e^{-\int \tan x \, dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x.$$

Multiplikation med $\cos x$ ger oss

$$\cos x \cdot \frac{dy}{dx} - \sin x \cdot y(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x.$$

Vänsterledet är derivatan $\frac{d}{dx}(\cos x \, y(x))$. Integrering ger oss

$$y(x) \cdot \cos x = x - \sqrt{2} \sin x + C.$$

Insättning av begynnelsevillkor $y(0) = 0$ ger oss $C = 0$, varav

$$y(x) = \frac{x}{\cos x} - \sqrt{2} \tan x$$

på intervallet $0 \le x < \pi/4$.

Nu undersöker vi ekvationen på intervallet $[\pi/4, \pi/2)$. Ekvationen är

$$\frac{dy}{dx} - \tan x \cdot y(x) = 0$$

och begynnelsevillkor för den är villkor i punkten $x = \pi/4$:

$$y(\pi/4) = \left(\frac{x}{\cos x} - \sqrt{2}\tan x\right)\Big|_{x=\pi/4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - \sqrt{2}.$$

Ekvationen löses som tidigare: multiplikation med $\cos x$ ger oss

$$\frac{d}{dx}(\cos x\, y(x)) = 0$$

och integrering ger oss

$$y(x)\cos x = D.$$

Insättning av begynnelsevillkor $y(\pi/4) = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - \sqrt{2}$ ger oss $D = \pi/4 - 1$ och vi får lösningen

$$y(x) = \frac{\pi/4 - 1}{\cos x}$$

på intervallet $[\pi/4, \pi/2)$.

5. Funktioner $y_1(x) = 1 + x$, $y_2(x) = 1 + 2x$, $y_3(x) = 1 + 3x^2$ är lösningar av inhomogena differentialekvationen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),\ x > 0.$$

(2p) 1) Bestäm den allmänna lösningen av homogena differentialekvationen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x > 0.$$

Motivera ordentligt!

(2p) 2) Lös ursprungliga inhomogena ekvationen med begynnelsevillkor $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

Lösning.

1) Funktioner $g_1(x) = y_2(x) - y_1(x) = x$ och $g_2(x) = y_3(x) - y_2(x) = 3x^2 - 2x$ är två lösningar till homogena ekvationen. Dessutom, funktionerna g_1 och g_2 är linjärt oberoende (t ex kan man räkna Wronskii determinant

$$\begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x^2 - 2x \\ 1 & 6x - 2 \end{vmatrix} = 3x^2$$

vilket är nollskilt på intervallet $(0, \infty)$). Alltså utgör funktionerna $g_1(x)$ och $g_2(x)$ ett fundamentalt system av lösningar till homogena ekvationen och den allmänna lösningen har form

$$y_h(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) = C_1 x + C_2(3x^2 - 2x).$$

2) Vi söker lösningen i form

$$y(x) = y_1(x) + y_h(x) = 1 + x + C_1x + C_2(3x^2 - 2x).$$

Insättningen av begynnelsevillkor ger oss ekvationer

$$2 + C_1 + C_2 = 2; \qquad 1 + C_1 + 4C_2 = -1$$

varav $C_1 = 2/3$, $C_2 = -2/3$ och

$$y(x) = 1 + 3x - 2x^2.$$

(1p) **6.** 1) Bestäm Laplacetransform av funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2; \\ e^{-3t}, & 2 \le t. \end{cases}$$

(3p) 2) Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvation $y'' - y = f(t)$ med begynnelsevillkor $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Funktionen $f(t)$ är samma som i fråga 1.

Lösning.

(1) Vi anvïder oss av definition av Laplacetransform:

$$F(s) = \int_2^\infty e^{-3t}e^{-ts}\,dt = \int_2^\infty e^{-(3+s)t}\,dt = e^{-6}\frac{e^{-2s}}{s+3}.$$

(2) Vi beteknar Laplacetransform av lösningen med $Y(s)$. Ekvationen efter laplacetransform blir

$$s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0 - Y(s) = F(s)$$

vilket ger oss

$$(s^2 - 1)Y(s) = s + e^{-6}\frac{e^{-2s}}{s+3}$$

och

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 1} + e^{-6}e^{-2s}\frac{1}{(s+3)(s^2-1)}.$$

Partiellbråkuppdelning av varje rationell bråk ger oss

$$Y(s) = \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1} + e^{-6}e^{-2s}\left(\frac{1/8}{s+3} + \frac{1/8}{s-1} - \frac{1/4}{s+1}\right).$$

Inverse Laplacetransform ger oss

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-6}\left(\frac{1}{8}e^{-3(t-2)} + \frac{1}{8}e^{t-2} - \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\right)\mathcal{U}(t-2),$$

där $\mathcal{U}(t)$ är Heavisidesfunktion.

(1p) **7.** 1) Definiera begreppet fundamentalmatris av ett linjärt system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

(3p) 2) Antar att systemet ovan har fundamentalmatris

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{2t} \\ 2e^{-t} & 5e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ av systemet.

Lösning.

(1) En fundamentalmatris är en sådan $n \times n$ matris att dess kolonner är n linjärt oberoende lösningar till systemet.

(2) Varje fundamentalmatris $\Phi(t)$ uppfyller ekvation $\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t)$ varav $A = \frac{d\Phi(t)}{dt}\Phi^{-1}(t)$. Matrisen $\Phi(t)$ given i uppgiften ger oss

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 6e^{2t} \\ -2e^{-t} & 10e^{2t} \end{pmatrix}$$

och

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} -5e^{t} & 3e^{t} \\ 2e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Multiplikation av erhållna matriser ger oss

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{pmatrix}.$$

8. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i punkter $x = 0$ och $x = \pi$. Vid tiden $t = 0$ befinner den sig i vila men utsätts för ett slag med en stämgaffel. Detta ger strängen en begynnelsehastighet given av $g(x) = 3\sin x - \sin 3x$.

Bestäm förflyttningen $u(x,t)$ av strängen under antagandet att den uppfyller vågekvation

$$u''_{tt} = \frac{1}{100}u''_{xx}.$$

Lösning.

Vi formulerar först randvillkor som skall användas tillsammans med vågekvation. Strängen är fast i sina ändpunkter vilket ger oss villkor $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Att strängen befinner sig i vila vid $t = 0$ innebär att $u(x,0) = 0$. Till slut, villkor om begynnelsehastighet innebär att $u'_t(x,0) = 3\sin x - \sin 3x$.

Vi söker först produktlösningar till vågekvation som uppfyller homogena randvillkor d v s funktioner $u(x,t) = X(x)T(t)$ sådana att $X(0) = X(\pi) = 0$; $T(0) = 0$. Insättning av sådana u till vågekvationen ger oss

$$X(x)T''(t) = \frac{1}{100}X''(x)T(t).$$

Efter division med $X(x)T(t)$ får vi

$$100\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Eftersom vänsterledet beror endast på t och högerledet beror endast på x avgör vi att både leden skall vara konstanta. Vi får således två ekvationer:

$$T''(t) = \lambda \frac{1}{100} T(t); \qquad X''(x) = \lambda X(x),$$

där λ är någon konstant.

Vi undersöker nu tre möjliga fall för konstanten λ: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ samt $\lambda < 0$.

Om $\lambda = \alpha^2 > 0$ då är lösningen till ekvation $X'' = \alpha^2 X$

$$X(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}.$$

Randvillkor $X(0) = X(\pi) = 0$ ger oss att $C_1 = C_2 = 0$ d v s det finns endast triviala lösningar $u(x,t) = 0$ i fall $\lambda > 0$.

Om $\lambda = 0$ då har ekvationen

$$X'' = 0$$

lösningen $X(x) = C_1 x + C_2$ och igen randvillkor $X(0) = X(\pi) = 0$ ger oss att $C_1 = C_2 = 0$ och det finns endast triviala lösningar $u = 0$.

Om $\lambda = -\alpha^2$, då har ekvationen $X'' = -\alpha^2 X$ lösningen

$$X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x).$$

Villkor $X(0) = 0$ ger oss $C_1 = 0$. Därefter villkor $X(\pi) = 0$ ger oss att α skall vara ett heltal: $\alpha = n$ och vi får $X(x) = C_2 \sin(nx)$. Annan ekvation $T''(t) = -\frac{\alpha^2}{100} T(t) = -\frac{n^2}{100} T(t)$ har lösning

$$T(t) = D_1 \cos(n/10\, t) + D_2 \sin(n/10\, t).$$

Randvillkor $T(0) = 0$ ger oss att $D_1 = 0$. Till slut, får vi produktlösningar

$$u(x,t) = B \sin(nx) \sin(n/10\, t).$$

Enligt superpositionsprincipeln, summan av tidigare erhållna lösningar

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \sin(n/10\, t)$$

löser samma ekvation med homogena randvillkor. Det sista randvillkor $u'_t(x,0) = 3\sin x - \sin 3x$ ger oss

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n}{10} \sin(nx) = 3 \sin x - \sin 3x.$$

Vi får härifrån att $B_1 = 30$, $B_3 = -\frac{10}{3}$ och alla övriga $B_n = 0$. Detta ger oss svar

$$u(x,t) = 30 \sin x \sin(t/10) - \frac{10}{3} \sin(3x) \sin(3t/10).$$