Matematiska Institutionen, KTH

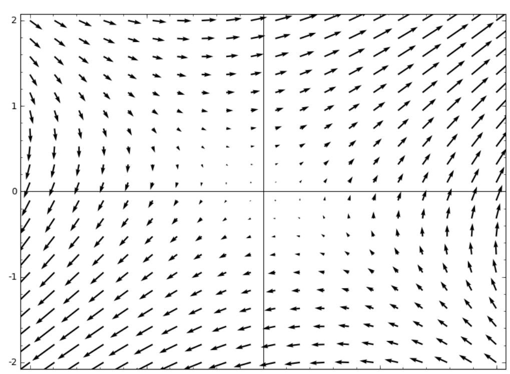
Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 17 december 2018 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg, 08-7906582.

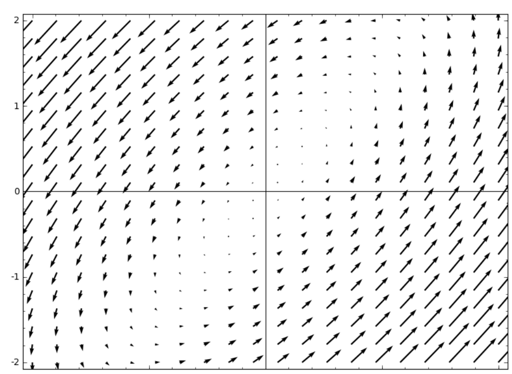
OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.
För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält (du behöver inte motivera svaret.) **Anm:** egenvärdena ger en hel del information.

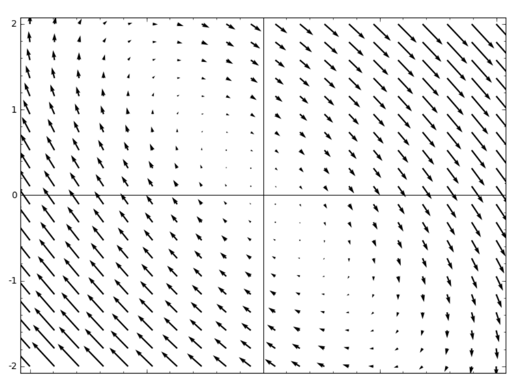
1. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$
2. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$
3. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$
4. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}$



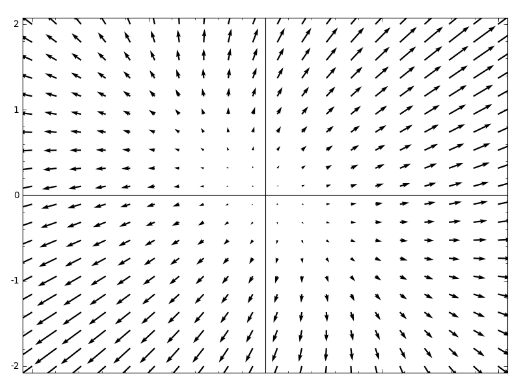
A



B



C



D

1B, 2C, 3A, 4D.

2. (4p) Låt $\mathcal{U}(t)$ beteckna Heavisides stegfunktion. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = \mathcal{U}(t-2) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

genom att använda Laplacetransformer.

Laplacetransformering (mha tabell) ger

$$s^2Y - 3 + 2sY + 5Y = e^{-2s}/s$$

och vi får

$$Y = \frac{3 + e^{-2s}/s}{(s^2 + 2s + 5)}$$

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5s} - \frac{1}{5}\frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}$$

Tabell ger nu:

$$L^{-1}(1/(s^2 + 2s + 5)) = 1/2e^{-t}\sin(2t)$$

$$L^{-1}(1/s) = 1, \quad L^{-1}(\frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}) = e^{-t}\cos 2t + (1/2)e^{-t}\sin 2t;$$

translationsregeln samt linjäritet ger nu

$$y(t) = (3/2)e^{-t}\sin 2t + \frac{U(t-2)}{5}(1 - (e^{-(t-2)}\cos 2(t-2) + (1/2)e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)$$

eller

$$y(t) = \begin{cases} (3/2)e^{-t}\sin 2t & 0 \le t < 2, \\ (3/2)e^{-t}\sin 2t + \frac{1}{5}(1 - (e^{2-t)}\cos(2t-4) + (1/2)e^{2-t}\sin(2t-4) & t \ge 2. \end{cases}$$

3. Flervalsfrågor (du behöver inte motivera dina svar):

   (a) (2p) Hur många jämviktslösningar (dvs, konstanta lösningar) har det autonoma systemet

   $$\frac{dy}{dx} = y^2(2y-3)(y+3)^2e^{2y-5}$$

   i. 1,
   ii. 2,
   iii. 3,
   iv. 4,
   v. 5.

(b) (2p) Vilket av följande alternativ är en fundamental lösningsmängd till systemet

$$y'' - 2y' + 2y = 0:$$

i. $\{te^t, e^t\}$,
ii. $\{e^t \cos t, e^t \sin t\}$,
iii. $\{\cos t, \sin t\}$,
iv. $\{t\cos t, t\sin t\}$,
v. $\{e^t \cos t + e^{-t}\sin t, e^{-t}\cos t + e^t \sin t\}$.

---

a: 3st. b: $\{e^t \cos t, e^t \sin t\}$.

---

4. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \tag{1}$$

- (2p) Bestäm en fundamental lösningsmängd till (1).
- (2p) Finn den allmänna lösningen till (1).

Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ser vi att $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, dvs en dubbelrot. Gausseliminering ger att lösningsrummet till $(A - \lambda I)v = 0$ har dimension ett, och spänns upp av $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Gausselimination ger nu att $(A - I)w = v$ har lösningen $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En fundamental lösningsmängd ges av vektorerna

$$x_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = te^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Den allmänna lösningen är då på formen

$$C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(te^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(där C_1, C_2 är konstanter.)

---

5. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$xy' + y = x^2 y^2, \quad y(1) = 1$$

samt ange existensintervallet för lösningen.

Substitutionen $y = y^{1-2} = 1/y$ ger $y' = (-1/u^2)u'$ leder till ekvationen

$$-xu'/u^2 + 1/u = x^2/u^2$$

som kan skrivas om som

$$u' + (-1/x)u = -x$$

Integrerande faktor ges av $e^{\int -1/x\,dx} = e^{-\ln x} = 1/x$; multiplikation med denna ger ekvationen

$$(u/x)' = -1$$

som leder ger att

$$u = x(c-x) = cx - x^2$$

och således $y = 1/u = 1/(cx - x^2)$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu $c = 2$, och vi får att

$$y(x) = \frac{1}{2x - x^2}.$$

Funktionen har singulariteter i $x = 0$ samt $x = 2$ och vi ser att existensintervallet ges av $I = (0, 2)$.

---

6. (4p) Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad t > 0,$$

samt

$$u(x, 0) = 2\cos(3\pi x) + 4\cos(5\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $XT = 3X''T$ som leder till

$$T'/(3T) = X''/X = -\lambda, \qquad \lambda \text{ konstant.}$$

Vi ser att $T' + 3\lambda T = 0$ har lösningen $T(t) = ce^{-3\lambda t}$.

För lösningar till $X'' + \lambda X$ delar vi upp i fall.

- $\lambda = 0$ ger $X'' = 0$, dvs $X = ax + b$. Randvillkoren för $x = 0$ och $x = 1$ ger att $a = 0$, och vi får den konstanta lösningen $X(x) = b$.
- $\lambda < 0$: vi skriver $\lambda = -\alpha^2$ och får ekvationen $X'' - \alpha^2 X = 0$ som har allmän lösning på formen $X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$, och $X' = \alpha(c_1 e^{\alpha x} - c_2 e^{-\alpha x}$. Randvillkor för $x = 0, 1$ ger nu $\alpha(c_1 - c_2) = 0$ samt $\alpha(c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha}) = 0$ och vi ser att enda möjligheten är $\alpha = 0$ eller $c_1 = c_2 = 0$ (eftersom $\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\alpha} & e^{-\alpha} \end{pmatrix}\right| \neq 0$), dvs ingen icketrivial lösning.
- $\lambda > 0$: med $\lambda = \alpha^2$ får vi ekvationen $X'' + \alpha^2 X =$ som har allmän lösning på formen

  $$X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

  och $X' = \alpha(-c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x)$; randvillkor för $x = 0$ ger $X'(0) = 0$ och således $c_2 = 0$. Om $c_1 \neq 0$ ger randvillkoret för $x = 1$ att $\sin \alpha x = 0$, dvs $\alpha = \pi n$ för $n = 0, 1, 2 \ldots$, som i sin tur ger att $\lambda = \alpha^2 = \pi^2 n^2$.

  Vi ser att $u_n(x,t) = e^{-3\pi^2 n^2 t} \cos \pi n x$ satisifierar alla ekvationer förutom det sista randvillkoret.

  För att det sista randvillkoret skall vara uppfyllt låter vi

  $$u(x,t) = 2e^{-3\pi^2 3^2 t} \cos 3\pi x + 4e^{-3\pi^2 5^2 t} \cos 5\pi x = 2e^{-27\pi^2 t} \cos 3\pi x + 4e^{-75\pi^2 t} \cos 5\pi x.$$

7. (4p) En anharmonisk svängning beskrivs av ekvationen

$$x'' + x' + 2x - x^3 = 0,$$

där $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Skriv denna ekvation som ett system. Finns det någon stabil kritisk punkt till detta system? Vilken typ av kritisk punkt är det i så fall?

Med $y = x'$ får vi systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - 2x - y \end{cases}$$

Ekvationerna för stationära punkter, dvs $x' = y' = 0$, blir då $y = 0$ samt $x^3 - 2x - 0 = 0$, dvs $y = 0$ samt $x = 0, \pm 2^{1/2}$, dvs punkterna

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, 0), \quad (-\sqrt{2}, 0)$$

Jacobianen ges av $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 2 & -1 \end{pmatrix}$; insätting i de olika punkterna ger Jacobianerna

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Då $\det(J_2) = \det(J_3) = -4$ ser vi att varken $(\sqrt{2}, 0)$ eller $(-\sqrt{2}, 0)$ eller kan vara stabil (något av egenvärdena måste vara positivt).

Det karakteristiska polynomet för J_1 är $\lambda^2 + \lambda - 4$ som har rötterna $-1/2 \pm \sqrt{1/4 - 2}$ som båda har realdel $-1/2$. Således är $(0,0)$ en asymptotiskt stabil (spiral) punkt.

8. (4p) Låt den 2π-periodiska funktionen f ges av

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \le \pi$$

   (a) Utveckla f i en Fourierserie.

   $f(x) = x^2$ på $(-\pi, \pi)$ ger

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = 2\pi^2/3.$$

   Då x^2 är jämn får vi $b_n = 0$ för alla n.
   Vi ser nu att

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

   (mha integraltabell)

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2x \cos nx}{n^2} + \frac{n^2 x^2 - 2}{n^3} \sin nx \right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} \cos \pi n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

   Alltså får vi

$$x^2 \sim \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(b) Använd Fourierserien för att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Eftersom f är styckvist kontinuerligt deriverbar, samt kontinuerlig i punkten $x = \pi$ får vi

$$\pi^2 = f(\pi) = 2\pi^2/6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

som ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (1/4)(\pi^2 - \pi^2/3) = \pi^2/6.$$