SF1633, # 9

(Inhomogena ekv. (Kap 8.3)).

Antag att vi har det linjära systemet

$$(IH) \quad \bar{x}' = A(t)\cdot\bar{x} + \bar{F}(t)$$

matris vektorer.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$; och A, $\bar{F}$ är kontinuerliga på I.

Ex: $n=2$

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\cdot x_1 + a_{12}(t)\cdot x_2 + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)\cdot x_1 + a_{22}(t) x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

A $\qquad$ $\bar{F}(t)$

Sats (8.1.6):

Om $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ är en fund. lös. mängd, på I, till det motsvarande <u>homogena</u> systemet

(H) $\quad \bar{x}' = A(t)\cdot\bar{x}$

<u>och</u> $\bar{x}_p$ är en lösning till

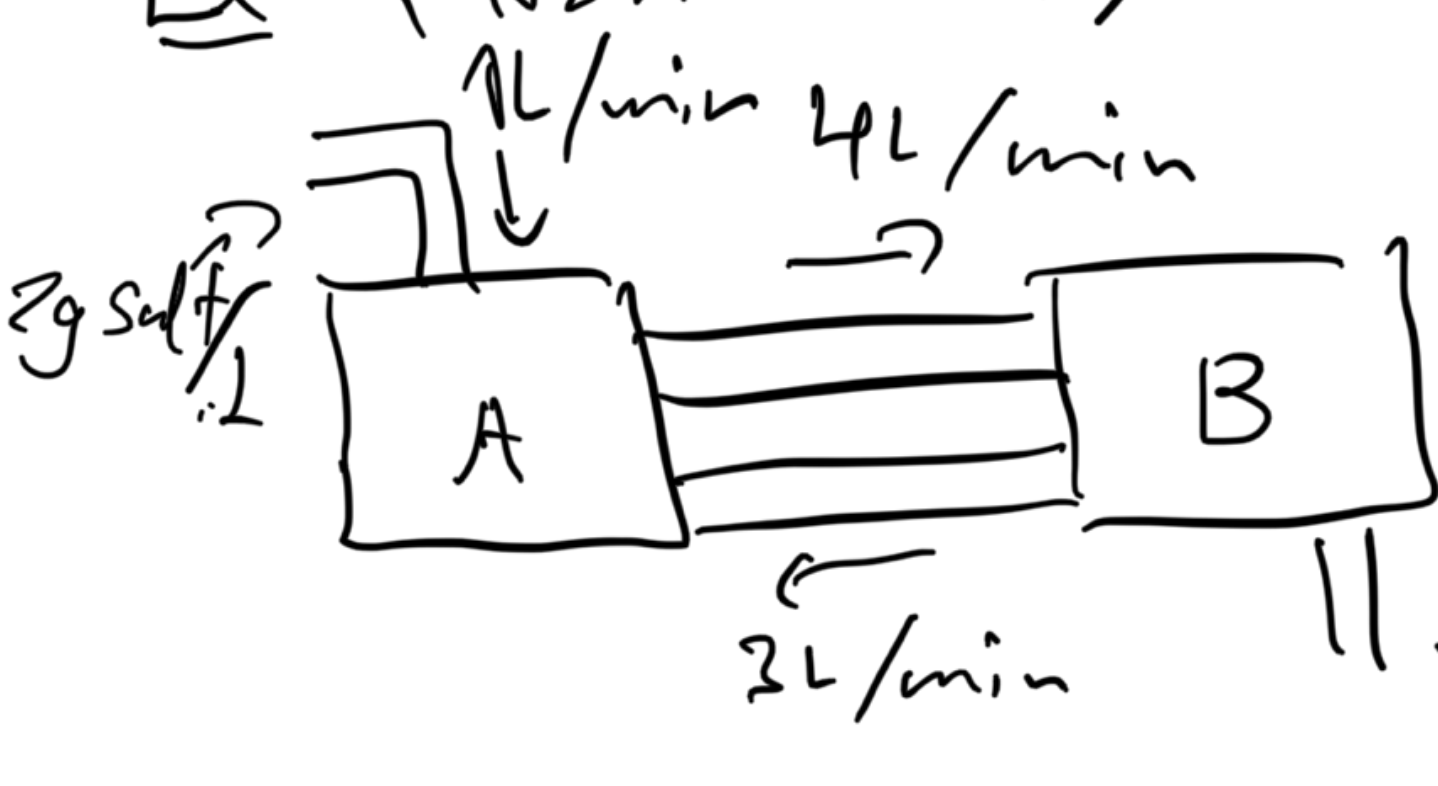
(IH) så är

$$\bar{x} = \bar{x}_p + c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \dots + c_n\bar{x}_n$$

den <u>allmänna lösningen</u> till (IH). (Där $c_1, \dots, c_n$ är konstanter.)

Hur hittar vi $\bar{x}_p$??

<u>Ex</u> (från F#4)



$t \to \infty$:
$\Rightarrow$ 2g/l i båda tankar
$\Rightarrow x_1(t) \to 20$
$\quad\; x_2(t) \to 40$

A: 10 liter, B: 20 liter

$x_1(t)$: mängd salt (g) i tank A

$x_2(t)$: —— " —— B

(BV)

Antag att $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 60$

Har sett: modell för systemet ges av:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{20}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \end{cases}$$

$+ 2$

$+ 0$

$f(t)$

Skriv på matrisform:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/20 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hitta $\bar{x}(t)$.

Steg 1: lös homogena systemet

$$(*) \quad \bar{x}' = A\bar{x}$$

(Kom ihåg: hitta egenvärden/vektorer)

Räkning ger: A har egenvärden

$\lambda_1 = -\frac{3}{10} + \frac{\sqrt{7}}{10}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{10} - \frac{\sqrt{7}}{10}$

med motsvarande egenvektorer

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}-1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}+1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Anm: $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ stabil lösning,

dvs då $t \to \infty$ kommer $\bar{x}(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (den stationära lösningen).

$\therefore$ Den allmänna lösningen till $(*)$ ges av

$$\bar{x}_h(t) = c_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\to 0} + c_2 \cdot \bar{v}_2 \cdot \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{\to 0}$$

då $t \to \infty$.

Trick: Sök partikulär-

lösning $\bar{x}_p$ till $\bar{x}' = A\bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
så här: ("metod med obestämda koeff.").

Ansats: $\bar{x}_p$ är på formen

$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, a, b är konstanter.

Insättning ger: ($\bar{x}' = A\bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$VL: \quad \bar{x}_p' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$HL: \quad A \cdot \bar{x}_p + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/5\, a + 3/20\, b \\ 2/5\, a + -1/5\, b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VL = HL $\Rightarrow$

$$-\frac{2}{5}a + \frac{3}{20}b + 2 = 0$$

$$\frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{5}\right)b + 2 = 0$$

$$\left(\frac{5}{20} - \frac{7}{20}\right) b + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad b = 40.$$

$$\frac{2}{5} a - \frac{1}{5} b = 0 \Rightarrow 2a = b$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

(lin. algebra!)

$\therefore$ $a = 20$, $b = 40$ och

$$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{X} = \bar{X}_h + \bar{X}_p = c_1 \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$\to 0$

c_1 & c_2? Använd B.V.

Dvs $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7} - 1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{(\sqrt{7} + 1)}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Övn. (lite jobbig...): finn c_1 & c_2

Anm: Då $t \to \infty$ så går

$\bar{x}(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$

Variation av parametrar:

(hitta $\bar{x}_p$ givet fund. lös. mängd för homogent system)

För enkelhets skull: tag $n=2$.

Antag att vi har systemet

$$(*) \quad \bar{x}' = A(t)\bar{x}$$

(där $A(t)$ är kont. på I.)

och att $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$

& $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ bildar en

fund. lös. mängd till $(*)$.

Den allmänna lösningen till

(*) [illegible] skrivas:

$$\overline{X} = c_1 \overline{X}_1 + c_2 \overline{X}_2 =$$

$$= c_1 \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} \\ c_1 \cdot x_{21} + c_2 \cdot x_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \end{matrix}}_{\overline{X}_1} & \underbrace{\begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \end{matrix}}_{\overline{X}_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Låt $\phi(t) = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 & \overline{X}_2 \end{pmatrix}$

"fundamental-matris".

Då kan den allmänna lösningen till (*) skrivas som $\overline{X} = \phi(t) \cdot \overline{c}$

$\overline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \end{pmatrix}$

där $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Anm:

$\Phi(t)$ är alltid inverterbar

på I. Övning underväst!

Varför? Jo: $\det(\Phi(t)) =$

$= \det\left(\left(\bar{x}_1 \ \bar{x}_2\right)\right) = W(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$

Wronskianen!

Anta att vi nu vill lösa inhomogent system

$$\bar{x}' = A(t)\cdot\bar{x} + \bar{F}(t)$$

Sök partikulärlösning!

Hur?!? Idé: Sök

$\bar{x}_p$ på formen $\bar{x}_p = \Phi(t)u(t)$

där $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$.

"

Insättning i ekvationen (**)

$\Rightarrow$ <u>om</u> $u(t)$ uppfyller

$$\boxed{u'(t) = \phi^{-1}(t)\bar{F}(t)}$$

så är $\bar{x}_p$ en part. lösning

<u>OBS</u>: inverterbar för <u>alla</u> $t \in I$

$$(**) \quad \bar{x}_p = \phi(t) \cdot u(t)$$

$$\Rightarrow \text{VL}: \bar{x}_p' = \phi'(t) \cdot u(t) + \phi(t) \cdot u'(t)$$

$$\text{HL}: A(t) \cdot \bar{x}_p + \bar{F}(t) =$$

$$= A(t)\,\phi(t)u(t) + \bar{F}(t)$$

$\text{VL} = \text{HL} \Rightarrow$

$$\phi'(t)u(t) + \phi(t)u'(t) = A(t)\phi(t)u(t) + \bar{F}(t)$$

Använd nu att $\phi(t)$ är lösning!

Dvs: $\phi'(t) = A(t) \cdot \phi(t)$ matris-ekv.

$$\Rightarrow \quad \bar{x}' = A(t) \cdot \bar{x} \qquad \phi(t) =$$

$$\cancel{A(t)\phi(t)u(t)} + \phi(t)u'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \ldots$$

$$\cancel{A(t)\cdot\phi(t)u(t)} + \bar{F}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(t)u'(t) = \bar{F}(t)$$

dvs $u'(t) = \phi(t)^{-1}\cdot\bar{F}(t)$

ger lösning!

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) & \bar{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1'(t) & \bar{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

Men: $\bar{x}_i'(t) = A(t)\bar{x}_i$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1'(t) & \bar{x}_2'(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A(t)\bar{x}_1 & A(t)\bar{x}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= A(t)\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} = A(t)\phi(t)$$

Ex: Bestäm allmän lösning till

$$(1)\quad \bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A.}\bar{x} + \underbrace{\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix}}_{=\bar{F}(t).}$$

Lösning: Steg I: homogent system: finn fund. lös. mängd till homogena systemet $\bar{x}' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\bar{x}$.

A har egenvärdet $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

och (tex) $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ är två lA. <u>oberoende</u> egenvektorer.

$$\therefore\ \bar{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot e^t,\quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot e^t$$

är två linj. oberoende
lösningar till $\bar{x}' = A\bar{x}$,
dvs $\bar{x}_1$ & $\bar{x}_2$ bildar en
fund. lös. mängd!

Låt $\phi(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.

fund. matris

~~Steg 2:~~
Sök $\bar{x}_p$ på formen

$\bar{x}_p = \phi(t) \cdot u(t)$;

får lösning om u
uppfyller: $u'(t) = \phi^{-1}(t) \cdot \bar{F}(t)$

Vi har: $\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1/e^t & 0 \\ 0 & 1/e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ser att $u'(t)$ uppfyller

$u'(t) = \phi^{-1}(t)\bar{F}(t) =$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Koll: $\phi^{-1}(t)\,\phi(t) =$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \cdot e^{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{0} & 0 \\ 0 & e^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sey: $u'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{pmatrix} t+a \\ t+b \end{pmatrix};$$ om $a=b=0$.

t.ex är $\bar{x}_p = \phi(t)u(t)$

$$= \phi(t)\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

(tag $a=b=0$)

$$= \begin{pmatrix} e^t \cdot t + 0 \cdot t \\ 0 \cdot t + e^t \cdot t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \cdot e^t \\ t \cdot e^t \end{pmatrix}$$ en part. lösning! $= \begin{pmatrix} e^t \cdot t \\ e^t \cdot t \end{pmatrix}$

Anm: ansatsen

$$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} (a+bt)\cdot e^t \\ (c+dt)\cdot e^t \end{pmatrix}$$

skulle funka. Men hur skall vi veta detta?

Punchline: den allmänna

...

lösningen till (1) ges av:

$$\bar{X} = \bar{X}_h + \bar{X}_p =$$

$$= \phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\cdot e^t \\ t\cdot e^t \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2 + \begin{pmatrix} t\cdot e^t \\ t\cdot e^t \end{pmatrix},$$

med c_1 & c_2 konstanter.

Hur invertera !?

<u>Anm:</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>OM</u> A^{-1} existerar, dvs

$\det(A) \neq 0$, dvs

$ad - bc \neq 0$

Anm: $\phi(t)$ fund. matris

$\Rightarrow$ $\phi(t)$ <u>automatiskt</u>

är inverterbar!