SF1633, #8

Homogena linj. system med konstanta koefficienter (Kap 8.2)

System på formen:

$$(*)\ X' = A \cdot X$$

där A är en $n \times n$ matris, beror ej på tid!

$$\text{där } X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Ansats: sök $X(t) \neq 0$ på formen

$$X(t) = \bar{v} \cdot e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 \cdot e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n \cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Ser då:

$X'(t) = \lambda \cdot \bar{v} \cdot e^{\lambda t}$; insättning i $(*)$ ger då:

$$\lambda\cdot\bar{v}\cdot e^{\lambda t} = A\cdot x(t) = A(\bar{v}\cdot e^{\lambda t}) = (A\cdot\bar{v})\cdot e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda\bar{v} = A\cdot\bar{v} \iff A\bar{v} = \lambda\cdot\bar{v}.$$

$\therefore$ Om $\bar{v}\neq\bar{0}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ, så är $x(t) = \bar{v}\cdot e^{\lambda t}$ en lösning. (Anm: $\bar{v}\neq\bar{0} \Rightarrow x(t)$ icke trivial lösning.)

Anm: $x(t) = 0\ \forall t$ är faktiskt en lösning, stationär sådan ("trivial")

Faktum Om en $n\times n$ matris A har n st olika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, och $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ är motsvarande egenvektorer (dvs $A\bar{v}_i = \lambda_i\cdot\bar{v}_i$

för $i = 1, 2, \ldots, n$).

Så är $X_1 = \bar{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$, $X_2 = \bar{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$,

$\ldots\ldots$, $X_n = \bar{v}_n \cdot e^{\lambda_n t}$

en fundamental lösningsmängd (på $(-\infty, \infty)$).

Den allmänna lösningen till $(*)$ ges av:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n$$

(där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är konstanter.)

Ex: Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 \end{cases} \longrightarrow \bar{X}' = A\bar{X}$$

Lösning: Skriv först på matrisform: med $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

får vi $X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{= A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \cdot X$; $X' = AX$

Steg 1: hitta egenvärden

Steg 2: —"— egenvektorer.

① Egenvärden: rötter till $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 - 4\lambda + \lambda - 4 - 6$$

$= \lambda^2 - 3\lambda - 10$. Har rötterna

$\lambda = -2$ och $\lambda = 5$.

$\therefore$ -2 & 5 är egenvärden.

② Sök motsvarande egenvektorer:

$\lambda = -2$: dvs $(A - (-2) \cdot I)\bar{v}_1 = 0$

dvs $(A + 2I)\bar{v}_1 = 0$

H

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4+2 & 2 & 0 \\ 3 & -1+2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

↑HL

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ och ser att t.ex

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ är lösning.

$\therefore \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ är egenvektor

$\lambda = 5$: P.S.S. fås att $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Koll: } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+2 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ dvs } A \cdot \bar{v}_2 = 5 \cdot \bar{v}_2.}$$

$$\therefore \lambda_1 = -2 \longleftrightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 \longleftrightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Således: $\bar{X} = c_1 \bar{v}_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \bar{v}_2 \cdot e^{5t}$

$$= \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}}_{\bar{X}_1(t)} + \underbrace{c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}}_{\bar{X}_2(t)}$$

är den <u>allmänna</u> lösningen,

och $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ bildar en

fund. lös. mängd.

Koll om oberoende:

$$W = \left| \bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \right| = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 2\cdot e^{5t} \\ -3\cdot e^{-2t} & 1\cdot e^{5t} \end{vmatrix}$$

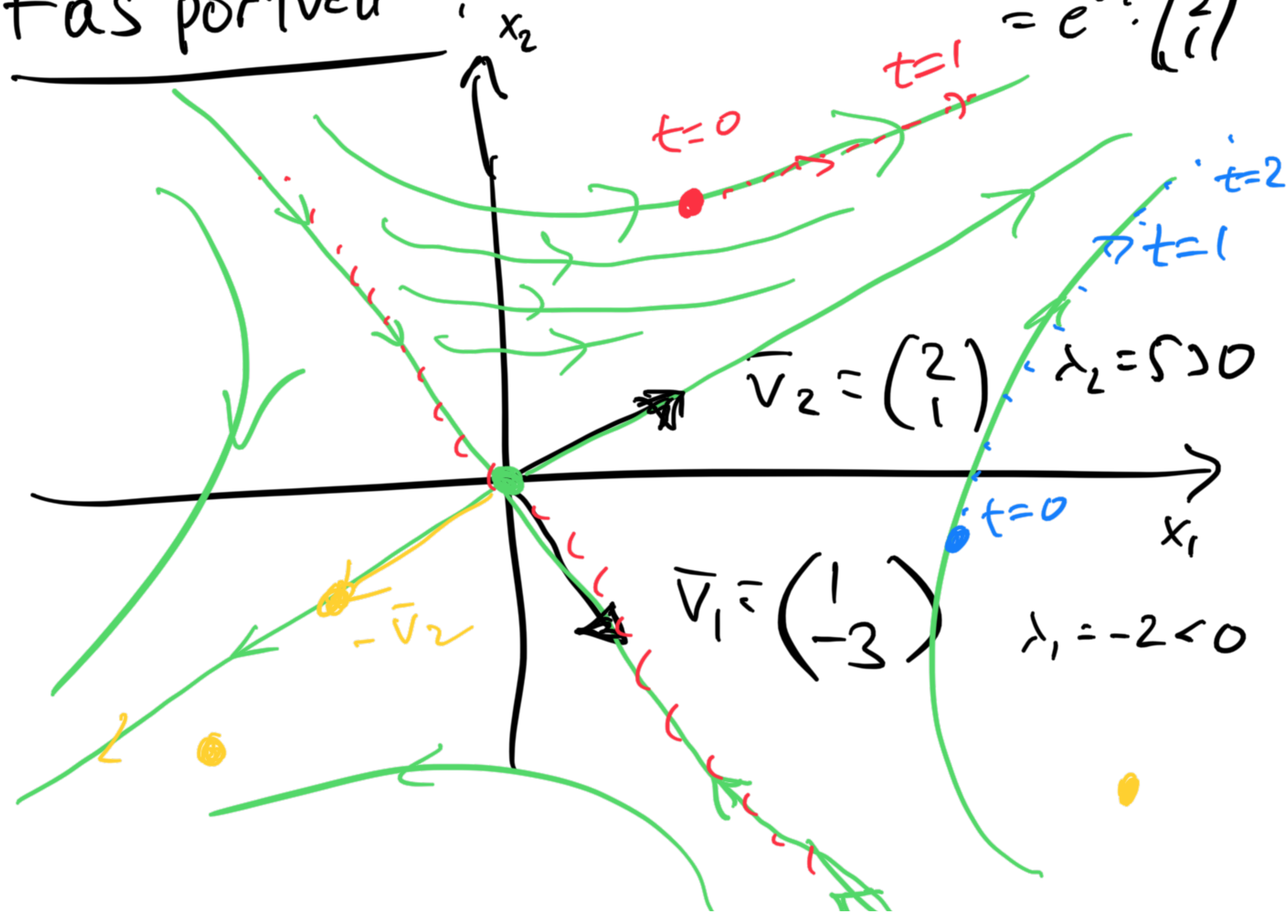
$$= e^{3t} - (2\cdot e^{5t})(-3\cdot e^{-2t}) =$$

$$= e^{3t} + 6\cdot e^{3t} = 7\cdot e^{3t} \neq 0 \ \forall t.$$

$\therefore$ $\bar{x}_1$ & $\bar{x}_2$ ger verkligen oberoende lösningar!

T.ex: $\bar{x}(t) = \bar{x}_2(t) = e^{5t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Fas porträtt:



Annan lösning: $\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Röd linje: krymper mot noll.

$$\bar{x}(t) = e^{5t}\cdot(-\bar{v}_2)$$

$$e^{t}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{t}\\0\end{pmatrix}$$

$$e^{t}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{t}\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}.$$

$\neq$

Knepigt: Fund. lösn. mängd, $\bar{X}_1(t)$, $\bar{X}_2(t)$

<u>Ex</u>: (<u>Komplexa egenvärden</u>)

Lös systemet $\bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\bar{x}$.

Lösning: Sök egenvärden till A :

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$\Longrightarrow \lambda = \pm i$ (komplex rot!)

Välj en rot, t ex $\lambda = i$.

Sök nu komplex egenvektor $\bar{v}$ motsvarande $\lambda = i$ som egenvärde : $\bar{v} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -i \cdot k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 - i k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} (A - \lambda I) \cdot \bar{v} = 0 \\ (A - i \cdot I) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

Notera: $i(-k_1 - ik_2) = -ik_1 + k_2$

rad 2 rad 1

Dvs: har egentligen bara en ekvation!
Så får ekvationen

$-k_1 - ik_2 = 0$; välj tex $k_2 = 1$

$\Rightarrow k_1 = -i$.

$\therefore \bar{v} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ är en

komplex egenvektor.

Då vi sökte lösn. på formen

$\bar{x}(t) = \bar{v} \cdot e^{\lambda t}$ Så är alltså

$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{it}$ en

komplex lösning.

Faktum: (för komplexa egenvärden)

Real & imaginärdelen

av $\bar{X}(t)$ ger oss två

av $\bar{x}(t)$ ger oss två reella lösningar som är linjärt oberoende!

komplex lösn

(Dvs: $\bar{x}_1(t) = \mathrm{Re}(\bar{x}(t))$

& $\bar{x}_2(t) = \mathrm{Im}(\bar{x}(t))$

bildar en fund. lös. mängd!).

Vi har:

$$\bar{x}(t) = \bar{v}\cdot e^{it} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{it} =$$

$e^{(2+3i)t}$ om $\lambda = 2+3i$

$$\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\cos t + i\cdot \sin t\right)$$

$i^2 = -1$

$$= \begin{pmatrix} -i\cos t - (i)^2 \cdot \sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t - i\cos t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\bar{x}_1(t) = \mathrm{Re}(\bar{x}(t))} + i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\bar{x}_2(t) = \mathrm{Im}(\bar{x}(t))}$$

~~Anm:~~

$$e^{(2+3i)t} = e^{2t} \cdot e^{3it} = e^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t))$$

Anm: Oberoende-koll:

$$W = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2 t - (-\cos^2 t)) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \forall t.$$

Övning: Kolla att $\bar{x}_1$ & $\bar{x}_2$ verkligen är lösningen.

Dvs: $VL = \bar{x}_1'$

$HL = A\bar{x}_1$

vill att $VL = HL$.

Punchline: Den allmänna

lösningen ges av

$$\bar{x}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Egenvärden med multiplicitet

Betrakta $\bar{x}' = A\bar{x}$ (H).

Antag att $\det(A - \lambda I)$ har dubbelrot.

Ex: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^2 \Longrightarrow \lambda = 1$ är dubbelrot.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)^2$; också dubbelrot.

Två fall: om det finns två oberoende egenvektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ (tillhörande λ)

Så är $\bar{X}_1(t) = \bar{v}_1 \cdot e^{\lambda t}$,

$\bar{X}_2(t) = \bar{v}_2 \cdot e^{\lambda t}$

linjärt oberoende lösningar.

(Enkla fallet!).

I ex a) ovan är (t.ex.)

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 st

oberoende egenvektorer!

$A = I$.

$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fall 2 (knepiga):

Om det bara finns

"en" oberoende egenvektor

gör vi så här:

Vet att $\bar{X}_1(t) = \bar{v}_1 \cdot e^{\lambda t}$

är en lösning. (Om $\bar{v}_1$

uppfyller $(A - \lambda I)\bar{v}_1 = \bar{0}$).

Ansats: sök lösning på form

$\bar{X} = \bar{v}_1 \cdot t \cdot e^{\lambda t} + \bar{u} \cdot e^{\lambda t}$

$\bar{x}_2 = \bar{v}_1 t e^{\lambda t} + \bar{u} e^{\lambda t}$

Insättning i (H) ger att vi får lösning om $\bar{u}$ uppfyller:

$$(A - \lambda I)\bar{u} = \bar{v}_1$$

<u>Koll</u>: $VL = \bar{x}_2' = \bar{v}_1 \left(1 \cdot e^{\lambda t} + \cancel{t \cdot \lambda e^{\lambda t}} \right) + \lambda \bar{u} \cdot e^{\lambda t}$

$HL = A\bar{x}_2 = A\left(\bar{v}_1 t \cdot e^{\lambda t} + \bar{u} \cdot e^{\lambda t} \right) =$

$= \cancel{\lambda \cdot \bar{v}_1 \cdot t \cdot e^{\lambda t}} + A \cdot \bar{u} \cdot e^{\lambda t}$

$\therefore$ Får likhet om

$$\bar{v}_1 \cdot \cancel{e^{\lambda t}} + \lambda \cdot \bar{u} \cdot \cancel{e^{\lambda t}} = A\bar{u} \cdot \cancel{e^{\lambda t}}$$

$$\Longleftrightarrow \bar{v}_1 = (A - \lambda \cdot I)\bar{u}$$

Dvs får verkligen lösning om $(A - \lambda I)\bar{u} = \bar{v}_1$.

$$\bar{x}' = A\bar{x}$$

$$\overline{X}_2{}' = A X_2$$

VL

HL.