Frl #7, del 2

(buggad padda.....)

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

<u>Dvs</u>: $\bar{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och $\bar{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ är <u>egenvektorer</u> (med egenvärden $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.)

Vidare, $\bar{x}_1(t)=e^t\cdot\bar{v}_1$, $\bar{x}_2(t)=e^{2t}\cdot\bar{v}_2$ är en <u>fundamental</u> <u>lösn.</u>-mängd till $(*)$.

Wronskianen $W=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^t&e^{2t}\\e^t&2\cdot e^{2t}\end{vmatrix}$

$=2\cdot e^{3t}-e^{3t}=e^{3t}\neq 0 \quad (\forall t)$.

(∴ oberoende!)

Noterа: $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2\cdot e^{2t} \end{vmatrix} = W$

"Finner Wronskianen utan derivator!"

Poäng: om systen ej kommer från 2:a ordnings ekvation, kan vi hitta lösningen så här:
Hitta egenvärden/vektorer för A, och "limma sedan ihop" till lösningen

$$\bar{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot \bar{v}_1$$

$$\bar{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot \bar{v}_2 .$$

Homogena system (HL = 0, dvs $F(t) = 0$)

(H) $\bar{x}' = A(t)\,\bar{x}$

($A(t)$ antas

kont. på I.)

Superposition:

Om $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$ är lösningar till (H), så är även

$$\bar{x} = c_1 \cdot \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2.$$

en lösning! (För varje val av konstanter c_1, c_2).

Linjärt beroende/oberoende:

Låt $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ vara lösningar till (H) på I.

De är <u>linjärt beroende</u>, om det finns $c_1, c_2, \dots, c_n$ (ej alla $=0$) s.a.

$$c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_n \cdot \bar{x}_n = 0$$

($\forall t \in I$.).

Annars är de <u>linjärt oberoende</u>

<u>Sats</u>: Antag att $\bar{x}_1(t), \ldots \bar{x}_n(t)$

är lösningen till (H)

(n: antal elevatroner).

Dessa lösningar är <u>linjärt oberoende</u> på $I \Longleftrightarrow$

Wronski-determinanten

$$W = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{vmatrix} \neq 0$$

på I.

<u>Ex</u>: Ovan hade vi systemet

($n=2$)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

(**) $\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}(t)$

(Kan ta $I = (-\infty, \infty)$)

med lösningen

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$,

och $W = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & 2 \cdot e^{2t} \end{vmatrix} = 2 \cdot e^{3t} - e^{3t} =$

$= e^{3t} \neq 0 \quad \forall t$

$\therefore$ $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ är linjärt oberoende och bildar en fundamental lösningsmängd till systemet

Sats: Låt $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_n(t)$ vara en fundamental lösn. mängd till

$$(H) \qquad \bar{x}'(t) = A(t)\,\bar{x}(t)$$

(på I). $\qquad$ $n \times n$ matris

Då kan varje lösning till (H) på I skrivas på formen

$$\bar{x}(t) = c_1 \cdot \bar{x}_1(t) + c_2\,\bar{x}_2(t) + \ldots + c_n\,\bar{x}_n(t),$$

där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är konstanter.

$$\bar{x}(t) = c_1\,\bar{x}_1(t) + \ldots + c_n\,\bar{x}_n(t)$$

är den allmänna lösningen till systemet.

Ex: (från tidigare) Säg att

$$\bar{x}(t) = c_1\,\bar{x}_1(t) + c_2\,\bar{x}_2(t)$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

är den allmänna lösningen

ja.

<u>Anm</u>: Hur kolla oberoende?

Räkna ut W!