SF1633, #7 (linjära system Kap 8.1).

Repetition: har sett 2:a ordningens linjära ekvationer

(*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)y = f(t)$.

"Gör om" till system av ordning 1:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)\cdot x_2 + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)\cdot x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

(dim $n=2$, se bok för $n>2$.)

Notera: om vi låter: $\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$

Så kan (1) skrivas (kompakt!)

som

(2) $\bar{X}'(t) = A(t)\bar{X}(t) + F(t)$.

[För $n=1$ får vi $x_1' = a_{11}(t)\cdot x_1(t) + f_1(t)$]

Påstående: (*) kan skrivas om som system på form (1).

Hur?! Låt $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = y'(t)$.

Då är $x_1'(t) = y'(t) = x_2(t)$

och

$$x_2' = y'' = -p(t)y' - q(t)y + f(t)$$

$$= -p(t)x_2 - q(t)x_1 + f(t)$$

$\therefore$ Får systemet

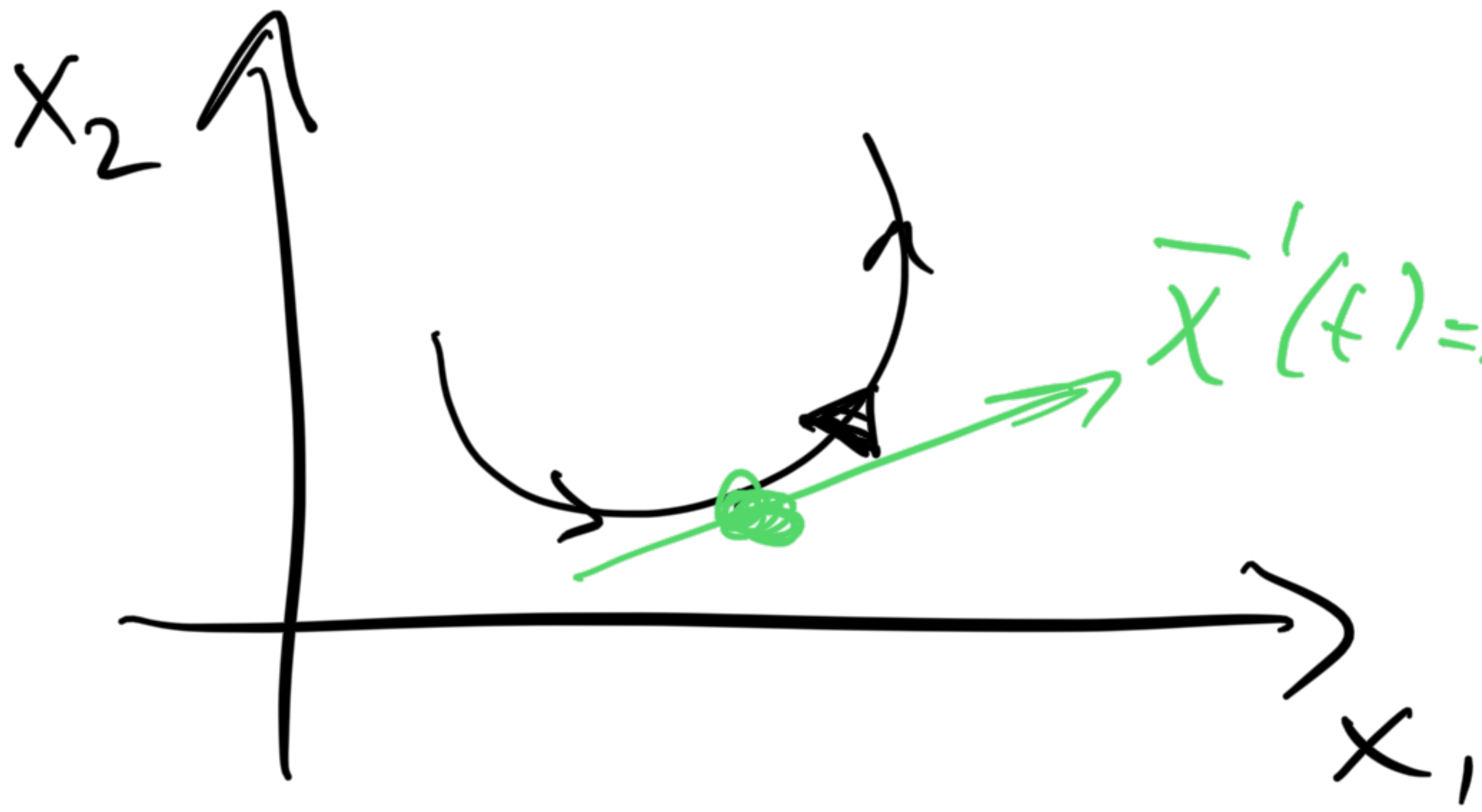
$a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$

$f_1(t) = 0$
$f_2(t) = f(t)$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \underbrace{-q(t)}_{a_{21}} x_1 \underbrace{-p(t)}_{a_{22}} x_2 + f(t). \end{cases}$$

Vi säger att $\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ (eller (1)) är en lösning till (2) (på intervallet

I) om x_1, x_2 är deriverbara,
och om $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + F(t)$

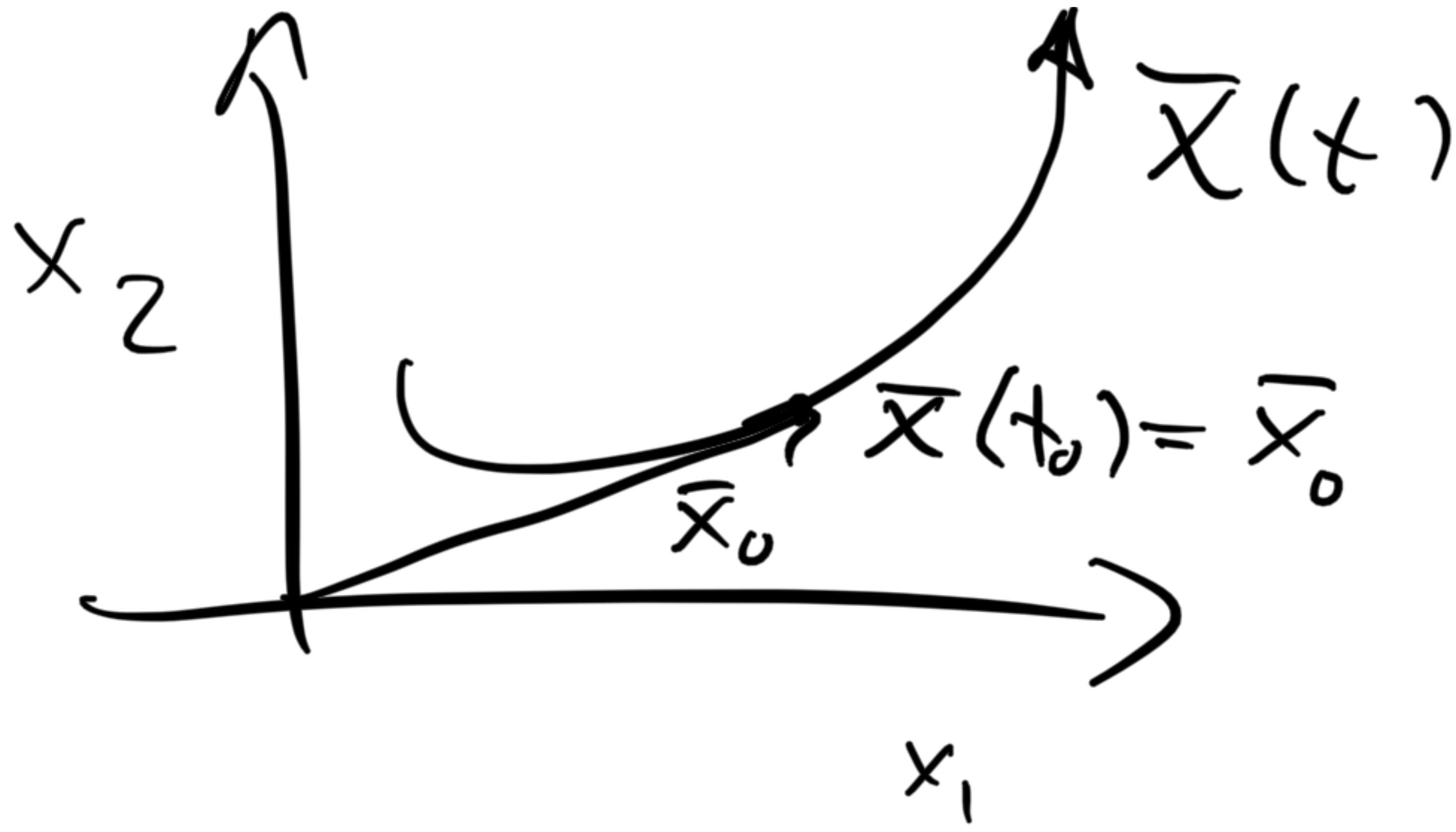


Existens & entydighet

Anta att $A(t)$ & $F(t)$
är kontinuerliga på I,
och $t_0 \in I$. Då finns en
unik lösning till BVP

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + F(t) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

(som existerar på hela I.)



Ex: Betrakta ekv

(*) $$y'' - 3y' + 2y = 0$$

(envarre!)

[Kar. ekv. $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Longleftrightarrow$ $r = 1$ eller $r = 2$ $\Longrightarrow$

allmän lösning ges av

$$y = C_1 e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{2 \cdot t}$$]

Skriv om som system av ordning 1. Låt:

$x_1 = y$, $x_2 = y'$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_1' = y' = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2' = y'' = 3y' - 2y = 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

På matrisform:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

dvs

$$(**) \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} \quad , \text{då}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \left[= \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right]$$

Vet: $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ är allmän lösning till (*).

Då $y' = c_1 \cdot 1 \cdot e^t + c_2 \cdot 2 \cdot e^{2t}$

måste då

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 \cdot e^t + 2c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2\cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \cdot \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot e^t}_{\bar{x}_1(t)} + c_2 \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \cdot e^{2t}}_{\bar{x}_2(t)}$$

$\therefore$ $\bar{x}_1(t)$ & $\bar{x}_2(t)$ bildar en fundamental lösningsmängd till (**)

Undersök matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

[Rep. lin. alg. Egenvärden/vektorer

$\bar{v} \neq \bar{0}$ är en egenvektor med egenvärde λ

om $A\bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$

$(\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I) \cdot \bar{v} = \bar{0}.)$]

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

dvs $\lambda = 1$ eller $\lambda = 2$

(SAMMA som rötterna till kar. ekv. ovan!)

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ är egenvärden!

Notera: $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} =$