SF1633, Frl #6

Kursnämnd!!

Inhomogena ekvationer (forts. från sist)

Ekv. på form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (IH).$$

Sats: Om y_1, y_2 är en fund. lösningsmängd till den motsvarande homogena ekv. (HL=0)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = \underline{\underline{0}}$$

och y_p är en lösning till (IH) så ges den allmänna lösningen till (IH) av

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

(c_1, c_2 konstanter).

[Jfr lin alg.

(H) $\quad A\bar{x} = \bar{0} \quad$ vs

(IH) $\quad A\bar{x} = \bar{b} \neq \bar{0}$:

$$A\bar{x}_h = \bar{0} \quad \& \quad A\bar{x}_p = \bar{b} \neq \bar{0}$$

$$\Rightarrow A(\bar{x}_h + \bar{x}_p) = A\bar{x}_h + A\bar{x}_p =$$

$$= \bar{0} + \bar{b} = \bar{b}$$

∴ För att lösa (IH) måste vi dels lösa (H) <u>och</u> hitta <u>en</u> lösning till (IH).

<u>Reduktion av ordning (4.2)</u>

<u>Ex</u> Betrakta

$$xy'' + (2x-1)y' + (x-1)y = 0, \quad x>0$$

$(I = (0,\infty))$.

Ser att: $y_1 = e^{-x}$ är en lösning.

Övn.: dubbelkolla detta!

Hur hitta y_2 s.a. $\{y_1, y_2\}$ bildar en fundamental lösningsmängd?

Allmänt: givet lösning $y_1(x)$ till

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1),$$

hur hitta y_2? (Viktigt: y_1 får ej vara nollfunktionen!)

Ansats: Sök lösning y_2 på formen

$$y_2(x) = \underset{\uparrow \text{ okänd!}}{u(x)} \cdot y_1(x)$$

(1)

$$0 = y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$$

Vi får:

$$\begin{cases} y_2' = u \cdot y_1' + u' \cdot y_1 \\ \\ y_2'' = u \cdot y_1'' + u'y_1' + u'y_1' + u'' \cdot y_1 \\ \quad = u \cdot y_1'' + 2 \cdot u'y_1' + u'' \cdot y_1 . \end{cases}$$

Insättning i (1) $\Longrightarrow$ $[y_2'' + Py_2' + qy_2 = 0]$

$$0 = (u \cdot y_1'' + 2u' \cdot y_1' + u'' \cdot y_1) + P(u \cdot y_1' + u' \cdot y_1) + q \cdot u \cdot y_1 =$$

$$= u\,(\underbrace{y_1'' + P \cdot y_1' + q y_1}_{\text{0 då } y_1 \text{ var lösning till (1)!}}) + u'(2y_1' + Py_1) + u'' \cdot y_1$$

$$= u'(2y_1' + Py_1) + u'' \cdot y_1$$

Poäng: om vi låter $w = u'$ får vi

$$w(2y_1' + Py_1) + w' \cdot y_1$$

, dvs ekv. av ordning <u>ett</u>.

Kan skrivas:

$$w' y_1 + w(2y_1' + Py_1) = 0$$

Kända!

Åter till exempel!

Dvs: $\bullet \quad xy'' + (2x-1)y' + (x-1)y = 0$

<u>och</u> $y_1 = e^{-x}$ var lösning.

Sök y_2 på formen

$$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = u(x) \cdot e^{-x}.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_2' = u' \cdot e^{-x} + u(-e^{-x}) \\ y_2'' = u'' \cdot e^{-x} - u' e^{-x} + u'(-e^{-x}) + u \cdot e^{-x} \\ \quad = u'' \cdot e^{-x} - 2u' e^{-x} + u \cdot e^{-x}. \end{cases}$$

Insättning i $\bullet$ ger:

$$0 = x\left(u''\cdot e^{-x} - 2u'e^{-x} + u\cdot e^{-x}\right) +$$

$$(2x-1)\left(u'e^{-x} - ue^{-x}\right) + (x-1)u\cdot e^{-x}$$

$$= u'' x\cdot e^{-x} + u'\left(-2xe^{-x} + (2x-1)e^{-x}\right)$$

$$+ u\left(xe^{-x} - (2x-1)e^{-x} + (x-1)e^{-x}\right)$$

$+1$ -1

$= 0$ Alltid!

$$= u''\cdot xe^{-x} + u'(-1)e^{-x} = u''\cdot xe^{-x} - u'e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left(u'' x - u'\right).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 = e^{-x}(u''x - u') \\ \quad \forall x \\ \Rightarrow 0 = 0\cdot e^{x} = u''x - u' \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad u''x - u' = 0$$

Om vi tar $w = u'$ får vi:

$$w'\cdot x - w = 0, \text{ eller}$$

$$w' + \left(-\frac{1}{x}\right)w = 0 \qquad (x>0)$$

Mult. med IF $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}w' - \frac{1}{x^2}w = 0, \text{ dvs}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}w\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{x}w = c \Rightarrow W = c\cdot x$$

Nu ser vi att $w = u' \Longrightarrow$

$$u = \int w\,dx = \int c\,x\,dx = c_1 x^2 + c_2$$

$\therefore u = c_1 x^2 + c_2$ $\quad (c_1 = \frac{c}{2})$.

och vi får då att

$$y_2 = u \cdot y_1 = (c_1 x^2 + c_2) \cdot e^{-x}$$

är en lösning till ekv. $\forall c_1, c_2$.
(Allmän lösning!)

Kan ta:
$y_2 = (x^2+1)e^{-x}$

Kan ta $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ och
får då $y_2 = x^2 \cdot e^{-x}$.

Påst: $y_1 = e^{-x}$ & $y_2 = x^2 \cdot e^{-x}$
är fund. lösn. mängd!
Hur kolla? Titta på $W(y_1, y_2)$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x^2 e^{-x} \\ -e^{-x} & (2xe^{-x} - x^2 e^{-x}) \end{vmatrix}$$

$$= 2xe^{-2x} - x^2e^{-2x} - (x^2e^{-x} \cdot (-e^{-x}))$$

$$= 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x}\big(\underbrace{-1-(-1)}_{=0}\big)$$

$$= 2xe^{-2x} \neq 0 \quad \text{för } x > 0.$$

$\therefore$ $y_1 = e^{-x}$ & $y_2 = x^2 e^{-x}$.

bildar verkligen en fund. lös. mängd.

Variation av parametrar (4.6)

"Givet y_1, y_2, lösningar till (H), hitta y_p".

Anta att vi har inhomogen ekv.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

$$(HL \neq 0)$$

Metod för att hitta y_p

till (2) **OM** vi känner

fund. lös. mängd $\{y_1, y_2\}$

(Dvs y_1 & y_2 löser homogen

ekv. $y'' + p(x)y' + q(x)y = \underline{0}$)

Anm: Allmän lösning till (2)

ges då av $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$

Ide: sök y_p på formen

$$y_p = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$$

okända!

Kända!

Insättning i (2) (plussmart val – se bok!)

ger att följande funkar:

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W}$$

där $W_1 = | y_1 \quad y_2 |$

$$W = \begin{vmatrix} \cdots \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

och: $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$,

$\uparrow HL \neq 0$

$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$, dvs

$$u_1' = \frac{0 - y_2 f(x)}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}$$

$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

Ex: Bestäm allmän lösning till $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$

(på $(0, \pi)$).

Lösning:

1. Lös först homogena ekv.

y'' ...

$y'' + y = 0$ (elv. med ~~koeff~~ koefficienter, fin enavare går: kar. elv.

$0 = r^2 + 1 \Rightarrow r = \pm i$

$\Rightarrow$ allmän lösning ges av $y = c_1 \underbrace{\cos(x)}_{y_1(x)} + c_2 \underbrace{\sin(x)}_{y_2(x)}$

$\therefore$ $y_1 = \cos(x)$ & $y_2 = \sin(x)$ ger fund. lös. mängd till <u>homogen</u> elv.

2. Sök nu y_p på formen

$y_p = u_1 \cdot y_1 + u_2 y_2$. Vi får

jfr $c_1 y_1 + c_2 y_2$

då lösning om

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$\therefore u_1' = -1.$$

P.S.S. :

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} =$$

Sol: $W = 1.$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix}}{1} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$\therefore \quad u_2' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Integrering ger nu:

$$u_1 = \int u_1' \, dx = \int (-1) dx = -x + C$$

$$u_2 = \int u_2' dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + D$$
$$= \ln \sin(x) \quad + D$$
$$(\text{då } x \in (0, \pi))$$

Kan välja C, D "fritt":

Bra val $C = D = 0$

$$\Rightarrow \quad u_1 = -x \quad , \quad u_2 = \ln(\sin x).$$

$(u_1 + 1) y_1 + (u_2 + 1) y_2$

Detta ger nu: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$= (-x) \cdot \cos x + \ln(\sin(x)) \cdot \sin x.$$

Ser nu: ~~at~~ allmänna lösningen ges av:

(Kom ihåg: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$,

allmänna lös.: $y = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2$)

$$y = (-x)\cdot \cos x + \ln(\sin x)\cdot \sin(x)$$

$$+ c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$