SF1633, #5

Linjära ekvationer av högre ordning (Kap 4.1).

Ekv. på formen (ordning $n=2$, se bok för $n>2$)

$$(*)\quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

(är <u>linjär</u> av <u>ordning 2</u>.).

<u>Ex</u>: $y'' + (\cos x)\cdot y = 0$

är linj. (& av ordning 2).

Begynnelsevärden:

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

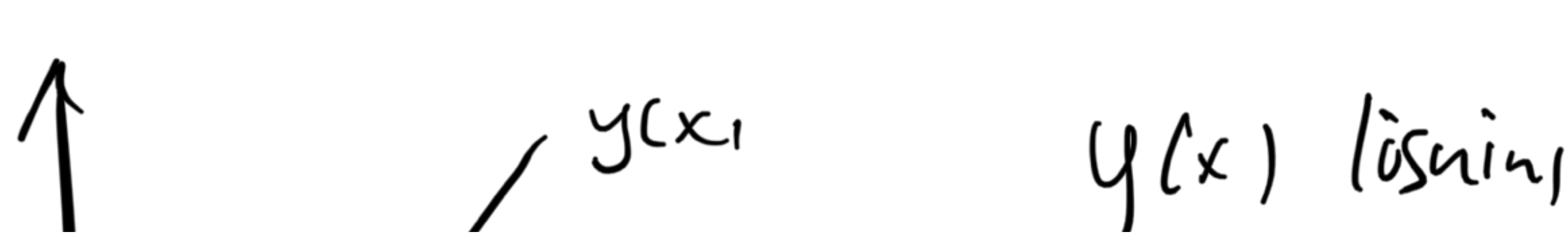
Vi skriver om (*) på "standard formen" (div. bort med $a_2(x)$ då $a_2(x) \neq 0$)

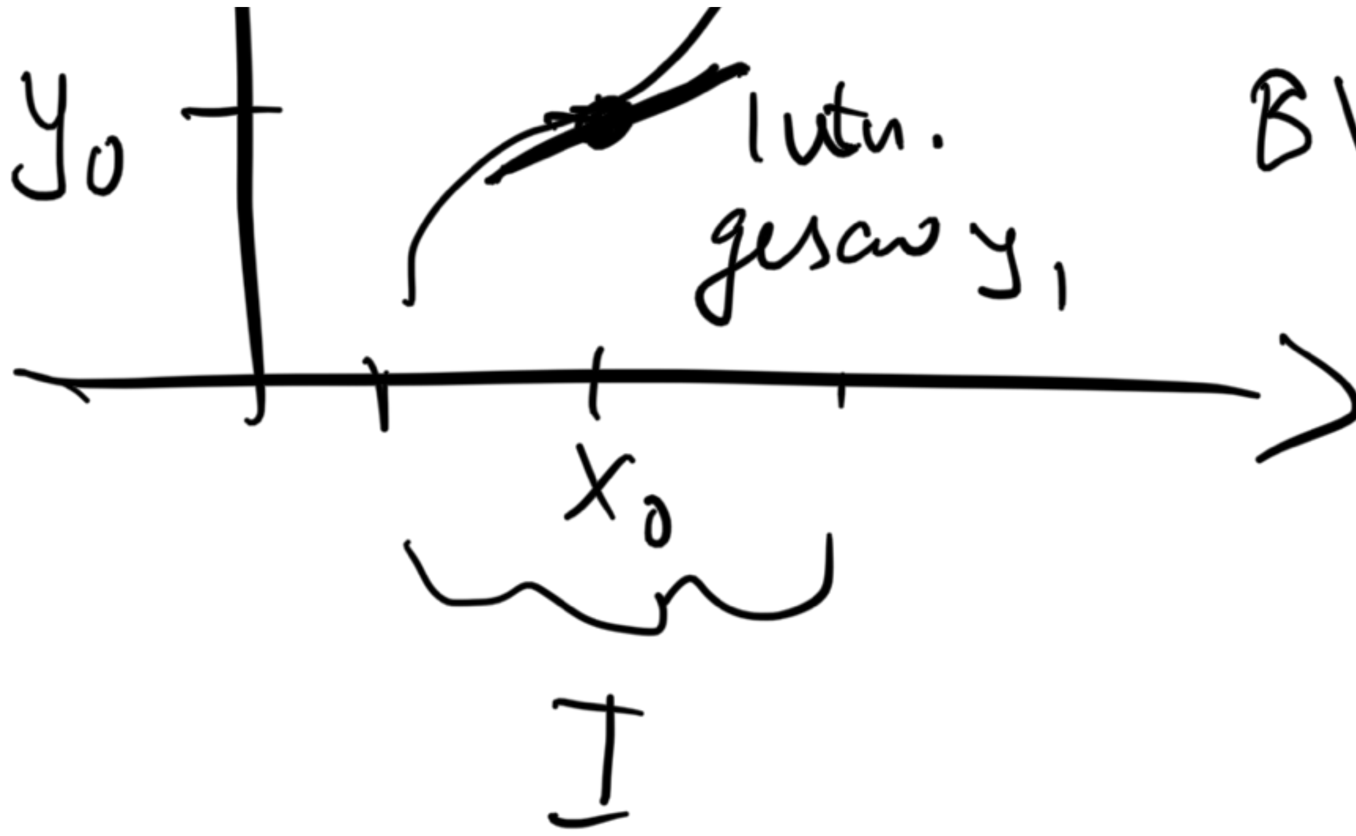
(**) $y'' + P(x)y' + q(x)y = f(x)$.

<u>Sats</u> (existens & entydighet)

Antag att p och q och f är kontinuerliga på något intervall <u>I</u>.

Om $x_0 \in I$, så finns en lösning till (**) som uppfyller B.V. Dessutom: lösningen existerar på <u>hela</u> I och den är <u>unik</u>





BV: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$

Homogena ekvationer $(HL = 0)$

Ekv. på formen:

$$(H) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\cdot y = \underset{HL}{0}$$

(p & q antas kontinuerliga på något intervall I)

Superpositionsprincipen:

Antag att $y_1(x)$ & $y_2(x)$ är lösningar till (H) på I.

Då är även $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ en lösning till (H) på I.

(för varje val av konstanter

c_1, c_2.). $y_1'' + p(x)\cdot y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \forall x$

om y_1 är lösning!

[Jfr: Lin. alg.

$A\bar{x} = \bar{0}$: om $A\bar{x}_1 = A\bar{x}_2 = \bar{0}$

$\Rightarrow$ även $c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$ ger lösning!]

Varför? Jo: om $y = c_1y_1 + c_2y_2 \Rightarrow$

$y'' + p(x)y' + q(x)\cdot y =$

$(c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2')$

$+ q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$

$= c_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0} +$

$c_2\underbrace{(y_2'' + p(x)\cdot y_2' + q(x)\cdot y_2)}_{=0}$

$= 0 + 0 = 0.$

$\therefore$ $c_1y_1 + c_2y_2$ är <u>också</u>

en lösning. Speciellt:
Om y_1 är lösning till (H), så är $C \cdot y_1$ också lösning;

om $C=0$ ser vi då att funktionen $y(x)=0 \quad \forall x$ också är lösning!
Kallas för "<u>trivial</u> lösning".

[Jfr: $\bar{x}=\bar{0}$ ger en lösning till $A\bar{x}=\bar{0}$, ~~ty~~ $A \cdot \bar{0} = \bar{0}$.]

<u>Ex</u>: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

Notera: $y_1 = e^x$ är en lösning

(ty $y_1'' = (e^x)'' = (e^x)' = e^x = y_1$

$\Rightarrow y_1'' - y_1 = 0$.)

$\therefore\ C_1 \cdot e^{x}$ är lösning $\forall$ konstanten C_1.

Vidare: $y_2 = e^{-x}$ är en lösning (ty: $y_2'' = (e^{-x})'' =$

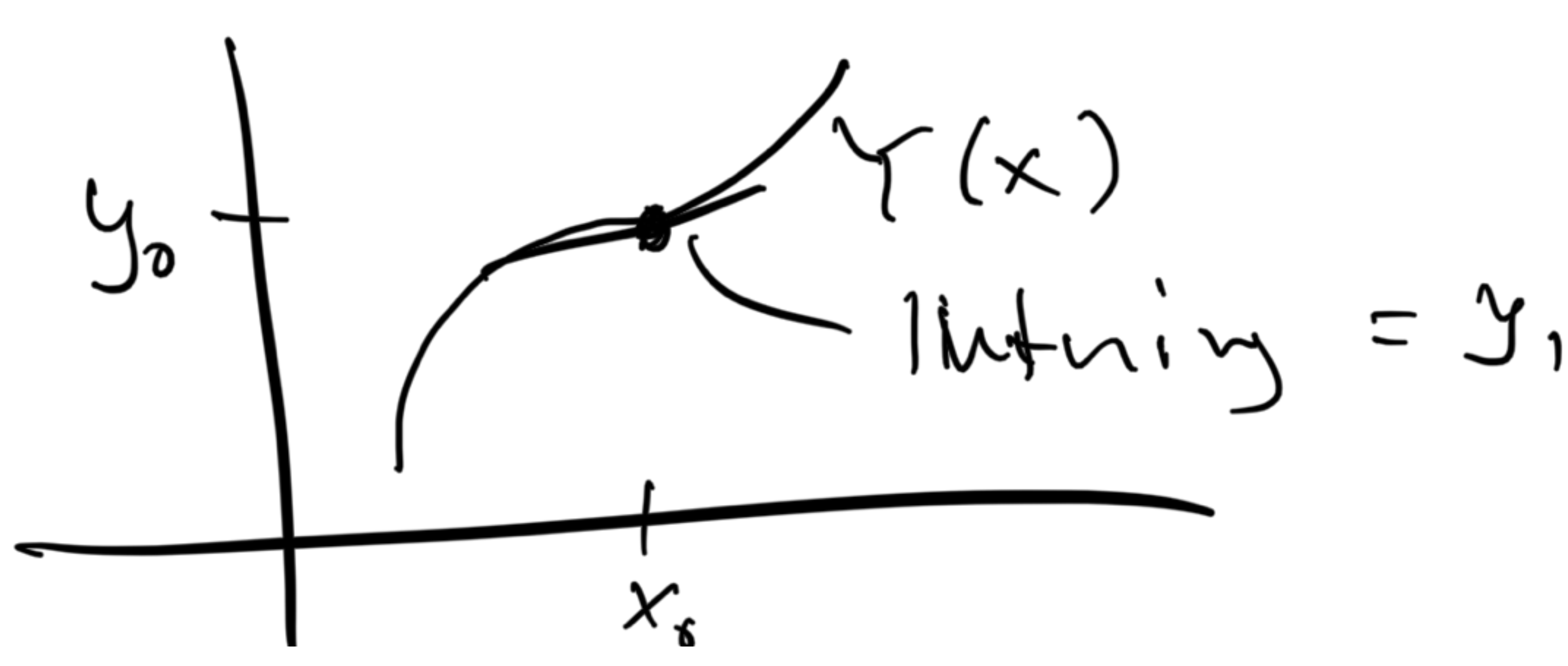
$= (-e^{-x})' = -(-e^{-x}) = e^{-x} = y_2$)

Prövning: $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 e^{-x}$ är lösning $\forall\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Finns det andra lösningar?

Nej!

Varför? Antag att Y är lösning till (H). Fixera x_0, och låt $y_0 = Y(x_0)$ och $y_1 = Y'(x_0)$



Skall visa (kommer strax)
att det finns lösning på

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (***)$$

Som uppfyller samma BV.

Dvs:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Enligt satsen ovan så har BVP en unik lösning.

∴ Vi måste då ha!

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Detta betyder: alla lösningar till $y'' - y = 0$
har formen $(***)$, med lämpligt val av c_1 & c_2.

Skall nu visa: Kan hitta

c_1 & c_2 så att "vi får till BV":

Dvs vill hitta c_1 & c_2

så att: $\begin{cases} y_0 = y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y_1 = y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{cases}$

och:

$\rightsquigarrow$ linj. ekv. system:

Samma sak!

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

[Lin.alg. När är vi garanterade att lösning finns?

Ekv: $A\bar{x} = \bar{b}$ (A 2×2-matris)

So: om $\det(A) \neq 0$

så kan man hitta lösning $\forall \bar{b}$!]

Anm: denna determinant kallas för Wronski-determinanten

$\therefore$ Vi kan hitta c_1 & c_2

om $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$ $\leftarrow$ <u>det</u>

Vi har: $\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} =$

$y_1 = e^x$

$y_2 = e^{-x}$

$= e^{x_0} \cdot (-e^{-x_0}) - (e^{-x_0}) \cdot e^{x_0} =$

$= -1 - 1 = -2 \neq 0.$

$\therefore$ det $\neq 0 \Longrightarrow$ kan hitta c_1 & c_2 så vi får lösning oavsett vad B.V. är får något.

<u>Def</u>: Funktionerna $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ är <u>linjärt beroende</u> på I om det finns $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (där något $c_i \neq 0$)

s.a. $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$

$\forall x \in I$.

Annars sägs funktionerna vara linjärt oberoende.

Ex: Låt: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$

$f_3(x) = 2x + 3$.

a) Visa att f_1, f_2 är linj. oberoende på $I = \mathbb{R}$.

Bevis: Antag att $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) =$

$= 0 \quad \forall x$. (Vill då visa att $c_1 = c_2 = 0$.).

Vi får då $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x = 0$

$\forall x \implies$ (sätt in $x=0$)

$\implies c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$

$\implies c_1 = 0$.

$\therefore$ Vi har $c_2 \cdot x = 0 \quad \forall x$

(sätt in $x=1$) $\Rightarrow c_2 = 0$

$\therefore \; c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x = 0 \;\; \forall x$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$, dvs

f_1 & f_2 är linj. oberoende!

b) Visa att f_1, f_2, f_3 är

<u>linjärt beroende</u>.

Bevis: Notera att

$$f_3(x) = 2 + 3x = 2 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2$$

$$\Rightarrow \; 2 \cdot f_1(x) + 3 \cdot f_2(x) + (-1) \cdot f_3(x)$$

$$= 0 \quad \forall x.$$

$\therefore$ Kan ta $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = -1$ och "bygga nollfunktionen";

Således <u>linj beroende</u>

( ) "

Betrakta (H): $y'' + p(x)y' + q(x)\cdot y = 0$

(p, q kontin. på I).

Sats: Antag att y_1 & y_2 är två lösningar till (H).

Då är y_1, y_2 lin. oberoende på I ~~omm~~ $\iff$ (=omm)

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in I.$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}\right)$$

Sats: Om y_1, y_2 är lösningar till (H) så gäller:

Antingen är $W(y_1, y_2) \neq 0$ $\forall x \in I$ ELLER så

är $W(y_1, y_2) = 0 \quad \forall x$
(om p, q är kontinuerliga på I.).

Ex: $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$
är lösningar till
$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$
(Ö: kolla detta!)

Vi har $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \begin{cases} = 0 & \text{om } x = 0 \\ \neq 0 & \text{om } x \neq 0 \end{cases}$$

Detta motsäger inte Satsen!

Varför? Måste konvertera till standardform: (div. med $q_2(x)=x^2$):

$$y'' + \left(\frac{-4}{x}\right)\cdot y' + \frac{6}{x^2}\cdot y = 0$$

div med 0

Notera: $x=0 \Rightarrow$ div. med noll, $p(x), q(x)$ ej. kont. på $I=(-\infty,\infty)$. Men:

Kan ta $I=(-\infty,0)$

eller $I=(0,\infty)$.

Def: Två linj. oberoende lösningar y_1, y_2 till (H) på I (dvs $W(y_1, y_2)\neq 0$) bildar en fundamental ~~lös~~ lösningsmängd till (H) på I.

Sats: Låt y_1, y_2 vara en fundamental lösningsmängd till (H) på I. Då kan varje lösning till (H) på I skrivas som $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ med c_1, c_2 konstanter.

"den allmänna lösningen".

Ex: $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \cos(x)$ är lösningar till $y'' + y = 0$ (Ö: Kolla detta!).

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^2(x) - \cos^2(x) = -(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= -1 \neq 0 \quad \forall x.$$

Enligt sats: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

är den allmänna lösning

av den allmänna lösningen
till ovanstående ekv.
På hela $\mathbb{R}$. ($I = \mathbb{R}$ ok).