SF1633, F4

Icke linjära modeller (3.2)

Ex: logistiska ekvationen (igen!).

Bakgrund: Exponentiell växt:

$$\frac{dP}{dt} = a \cdot P \implies$$

$$P(t) = P_0 \cdot e^{at}$$

(P_0: begynnelse population.).

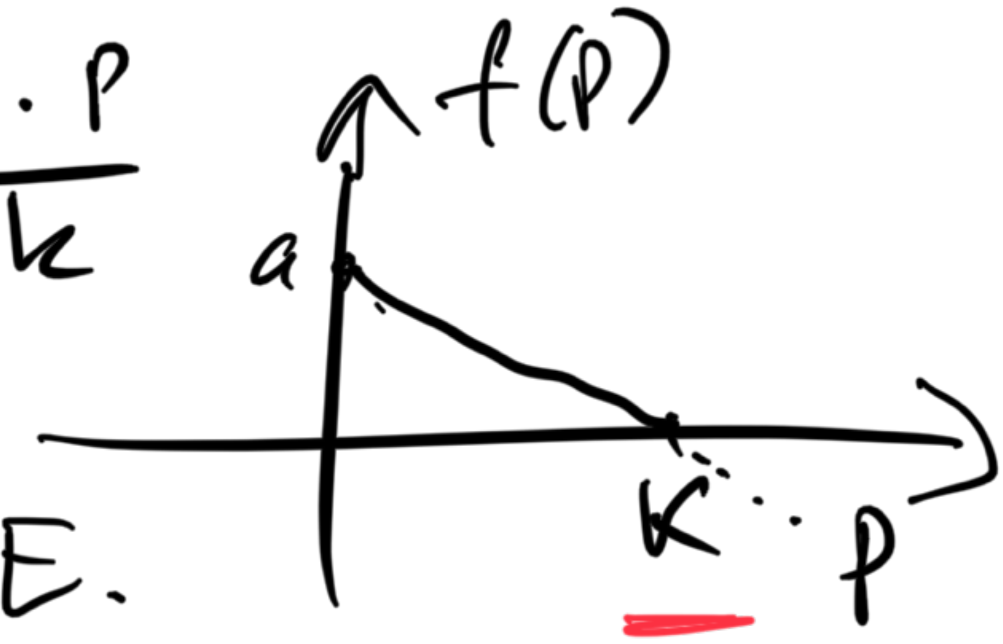
Korrigering: $\frac{dP}{dt} = f(P) \cdot P$, och vi vill ha

$$\begin{cases} f(P) \simeq a & \text{för "små" } P \\ f(P) < 0 & \text{om } P > K \end{cases}$$

("mättnad").

Många s-u, ett enkelt är:

$$f(P) = a - \frac{a \cdot P}{K}$$



$\Rightarrow$ modell för detta ger D.E.

$$\frac{dP}{dt} = \left(a - \frac{aP}{K}\right) \cdot P.$$

("Logistiska ekvationen, 1840")

Betrakta (för enkelhets skull) fallet $a = K = 1$. För då

$$(*) \quad \frac{dP}{dt} = P(1-P).$$

Kritiska punkter: $P = 0$, $P = 1$.

(Anm: modellantagande är $P \geq 0$.)

$$\frac{dP}{dt} = P(1-P) = \begin{cases} > 0 & \text{om } P \in (0,1) \\ < 0 & \text{om } P > 1 \\ [< 0 & \text{om } P < 0]. \end{cases}$$

dt ? t

Exakt lösning? Notera: Separabel!

① Dessutom: $\boxed{P(t) = 0}$ $\forall t$ kan då via $B=0$.

är ekv. lösning,

likaså $P(t) = 1$ $\forall t$

(stationära punkter!)

② Skriv $(*)$ på formen

$$(**) \quad \frac{dP}{P(1-P)} = dt.$$

[Partialbråksuppdela! (Rep!)

$$\frac{1}{P(1-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1-P}$$

Finn A, B: mult med $P(1-P)$

ger: $1 = A(1-P) + B \cdot P$

$= A + P(B-A).$

Dvs: $A = 1$ och $B - A = 0$
eller $B = 1$.

Övning: kolla att

(alltså) $\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}$ $\lrcorner$

$\therefore \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$

Integrering av (**) ger nu:

$$\int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) dP = \int dt$$

$$\ln|P| - \ln|1-P| = t + C \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{P}{1-P}\right| = t + C \Rightarrow$$

$$\left|\frac{P}{1-P}\right| = e^{t+C} = e^t \cdot e^C = e^t \cdot A$$

(där $A > 0$).

$A = e^C > 0$.

$$\Rightarrow \frac{P}{1-P} = \pm A \cdot e^t = B \cdot e^t$$

där $B \neq 0$.

mult. med $1-P$.

Lös nu ut P:

$$P = B \cdot e^t - P \cdot B \cdot e^t \quad = B(1-P) \cdot e^t$$

$B \cdot e^t$

$\Rightarrow P(1+B\cdot e^t) =$ ...

$\Rightarrow P = \dfrac{B\cdot e^t}{1+B\cdot e^t}$,

Givet B.V. $P(0) = P_0$ får vi:

$P_0 = P(0) = \dfrac{B\cdot e^0}{1+B\cdot e^0} = \dfrac{B}{1+B}$

$\Rightarrow B = P_0(1+B) = P_0 + P_0 B$

$\Rightarrow B(1-P_0) = P_0$

$\Rightarrow B = \dfrac{P_0}{1-P_0}$.

- Om $P_0 = \frac{1}{2}$ får vi $B = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

dvs $P(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$. $= \dfrac{1}{e^{-t}+1}$ $\to \infty$ om $t \to -\infty$.

(lösning existerar $\forall t$!).

Ser även: $P(t) \to 1$ då $t \to \infty$

(och $P(t) \to 0$ då $t \to -\infty$)

- Om $P_0 = 2$ får vi $B = \dfrac{2}{\ldots} =$

$1-2$

$= -2.$

Dvs $P(t) = \dfrac{-2e^t}{1-2e^t} = \dfrac{2e^t}{2e^t-1}$

Notera: division med noll om

BOOM $2e^t - 1 = 0$, dvs $e^t = 1/2$

dvs $t = \ln(1/2) = -\ln 2$.

$\therefore$ Lösning existerar för

$t \in (-\ln 2, \infty)$.

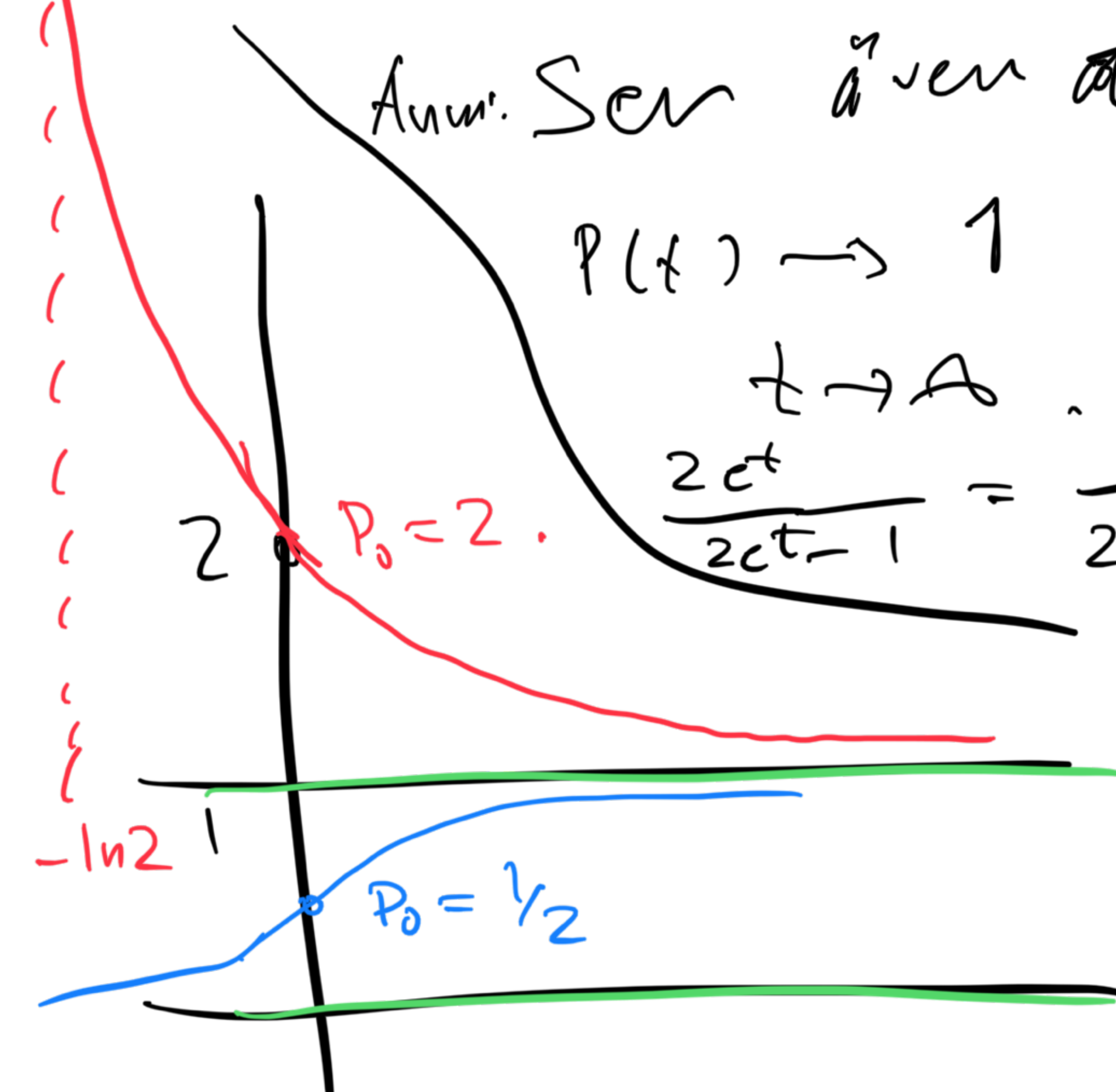
Anm: Ser även att

$P(t) \to 1$ då

$t \to \infty$. Varför?

$\dfrac{2e^t}{2e^t-1} = \dfrac{2}{2-e^{-t}} \to \dfrac{2}{2} = 1$

då $t \to \infty$.



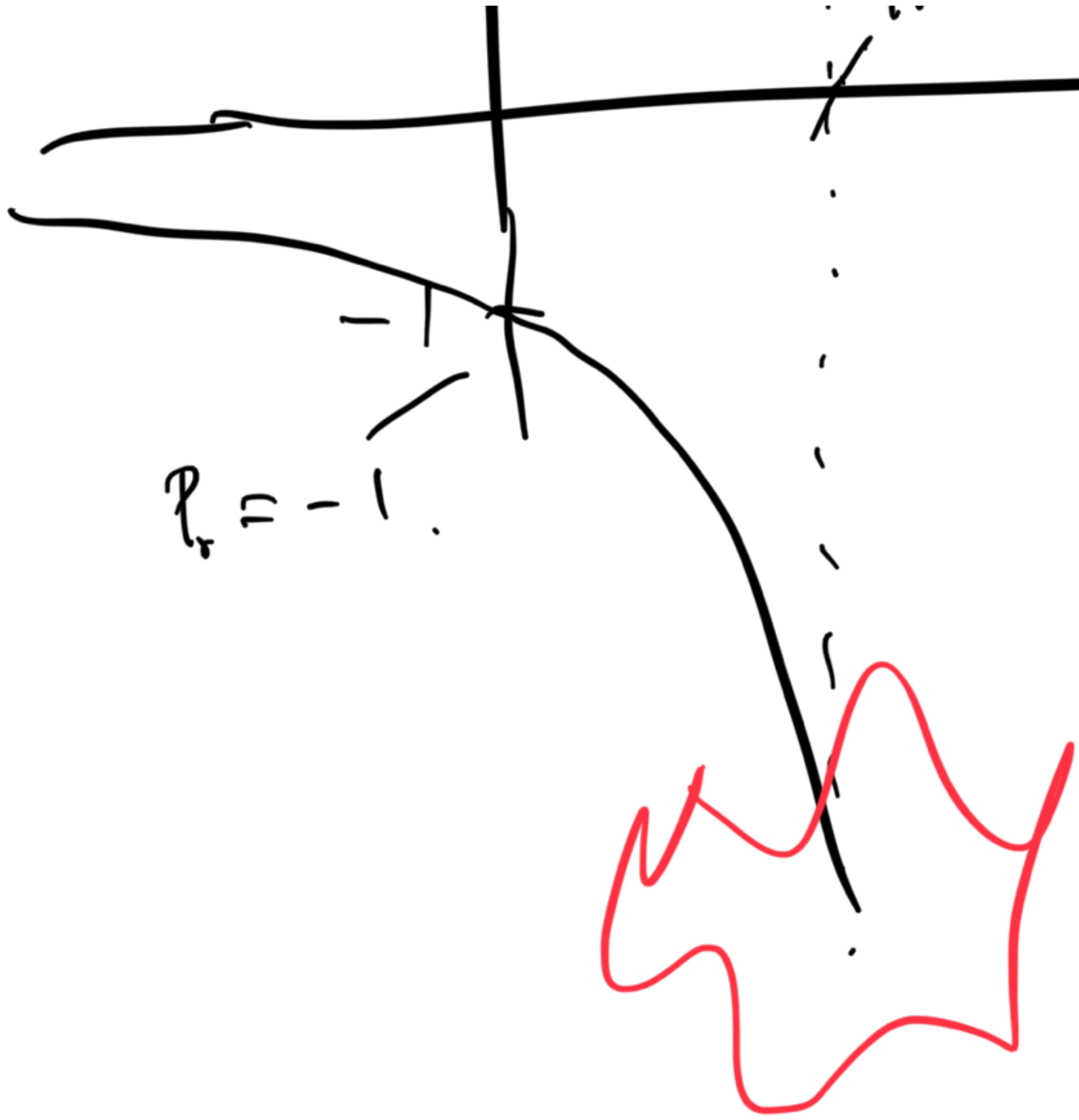
Varning: "lämmar modellen": tag $P_0 = -1$. (Diff.ekvation kan fortf. ha lösning!).

$$\beta = \frac{-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{-\frac{1}{2}e^t}{1 - \frac{1}{2}e^t} = \frac{-e^t}{2-e^t}$$

Får nu div. med <u>noll</u> om $2-e^t = 0$, dvs $e^t = 2$, dvs $t = \ln 2$. Lösning existerar för $t \in (-\infty, \ln 2)$

$$\lim_{t \to (\ln 2)^-} P(t) = -\infty.$$



"lösning exploderar efter ändlig tid!"

Anm: $\dfrac{e^{-t}}{2-e^{t}}$ ger "ok"

funktion för

$t \in (-\infty, \ln 2)$, eller

$t \in (\ln 2, \infty)$.

Hur välja existensintervall?

Vill ha begynnelse tid

($t=0$) i intervallet,

så minsta volym $(-\infty, \ln 2)$

om $t=0$ ger B.V.

"Boom"!

$$\frac{e^t}{1+e^t} = \frac{e^{-t}(e^t)}{e^{-t}(1+e^t)} =$$

$$= \frac{e^{-t+t}}{e^{-t}+e^{-t}\cdot e^t} = \frac{e^0}{e^{-t}+e^0} =$$

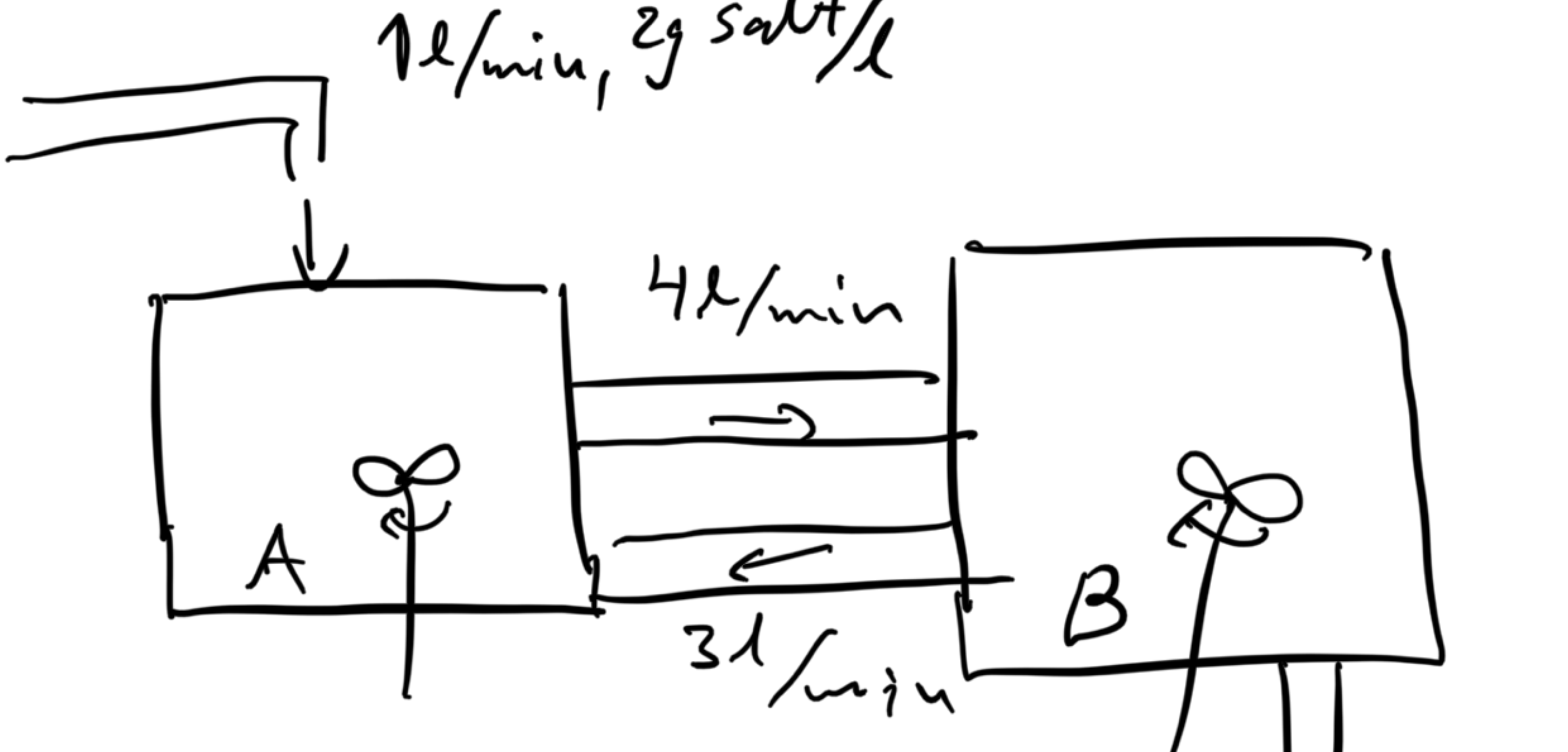
$$= \frac{1}{e^{-t}+1}.$$

Poäng: beroende på

B.V. ($\overset{t.ex}{} P_0 = 1/2\ ,\ 1, -1$)

Kan vi få <u>OLIKA</u> existensintervall!

<u>System</u> av 1:a ordningens ekvationer.



A: 10 l

~~A~~ B: 20 l

$x(t)$: mängd salt i tank A vid tid t

$y(t)$ ——— " ——— B —"—

Volym vatten i A, B konstant. (Vatten in = Vatten ut).

Salt i A:

$$\frac{dx}{dt} = R_i - R_u =$$

dt

salt in   salt ut

$$= (1\,l/min)(2g/l) + (3\,l/min)\frac{Y(t)}{20}(g/l) - (4\,l/min)\frac{X(t)}{10}\,g/l$$

$$= 2 + \frac{3Y}{20} - \frac{4}{10}X.$$

Salt i B:

$$\frac{dY}{dt} = \text{"salt in"} - \text{"salt ut"}$$

$$= 4\,l/min\,\frac{X(t)}{10}\,g/l - (3+1)\,l/min\,\frac{Y(t)}{20}\,g/l$$

$$= \frac{4X}{10} - \frac{4Y}{20}.$$

$\therefore$ Systemet ges av:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 2 + \frac{3Y}{20} - \frac{2X}{5} \\ \frac{dY}{dt} = \frac{2}{5}X - \frac{1}{5}Y. \end{cases}$$

Övning: finn ekvilibrium

lösningen. (Dvs $\frac{dx}{dt} = 0$
$\frac{dy}{dt} = 0$.)

Ex: Lotke-Volterra ekvationen (kemi + pop. dynamik) (1926).

$x(t)$: antal kaniner

$y(t)$: antal rävar

(Antar: oändligt med kaninmat!)

- Inga rävar $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = k \cdot x$
- Inga kaniner $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -my$ (svält).

Antar: antal "möten" mellan kanin & räv är prop mot $x \cdot y$. (Jfr Kemi).

$\rightsquigarrow$ Modell:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k \cdot x - L xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -my + n \cdot xy \end{cases}$$

k, L, m, n: parametrar.

Ex: (max förenklat)!
$k = L = m = n = 1$.

Får då:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy = x(1-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + xy = y(x-1) \end{cases}$$

$y=1$
$x=1$
$\Rightarrow$ konst. punkt!

Svår att lösa explicit, men kan hitta implicit lösning.

Titta på $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} =$

$$= \frac{xy - y}{x - xy} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)} = \frac{(x-1)}{x} \cdot \frac{y}{(1-y)}$$

Separabel! Skriv som:

$\frac{1-y}{y} \cdot dy = \frac{x-1}{x} dx$. Integration

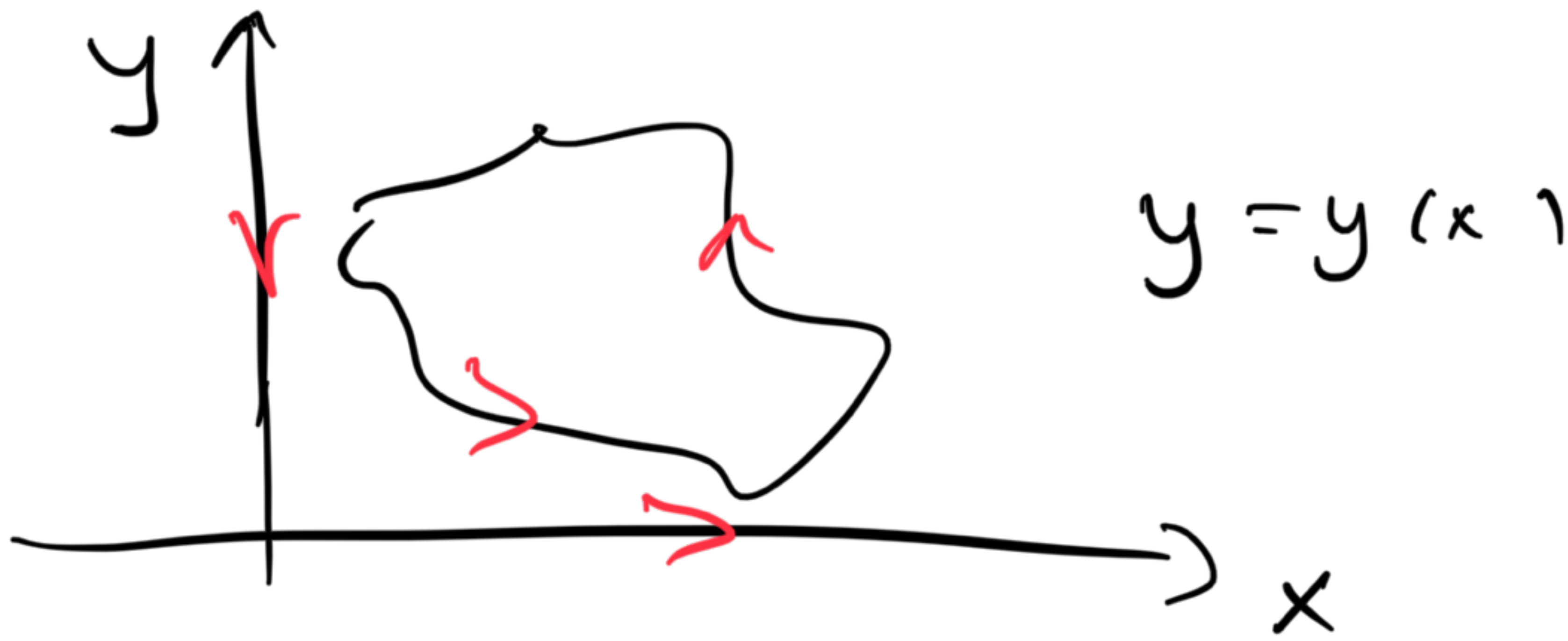
ger nu:

$\int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy \overset{+C_1}{=} \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \; +C_2$

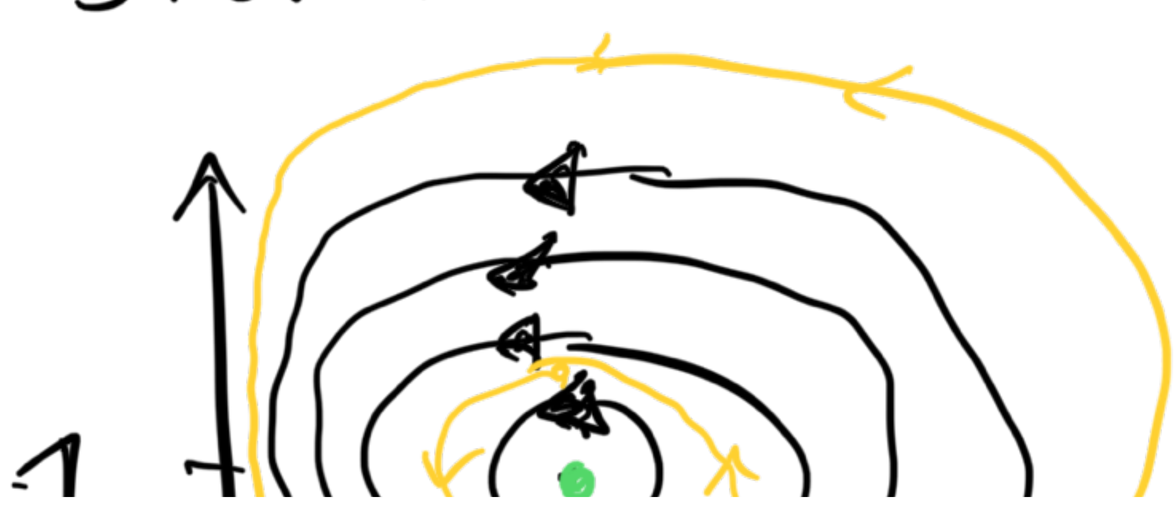
$\Rightarrow$

(*) $\ln y - y = x - \ln x + C$. $\quad C = C_2 - C_1$

Note: modell ger ~~x~~ $x, y \geq 0$
så strunta i $(|x|, |y|)$.

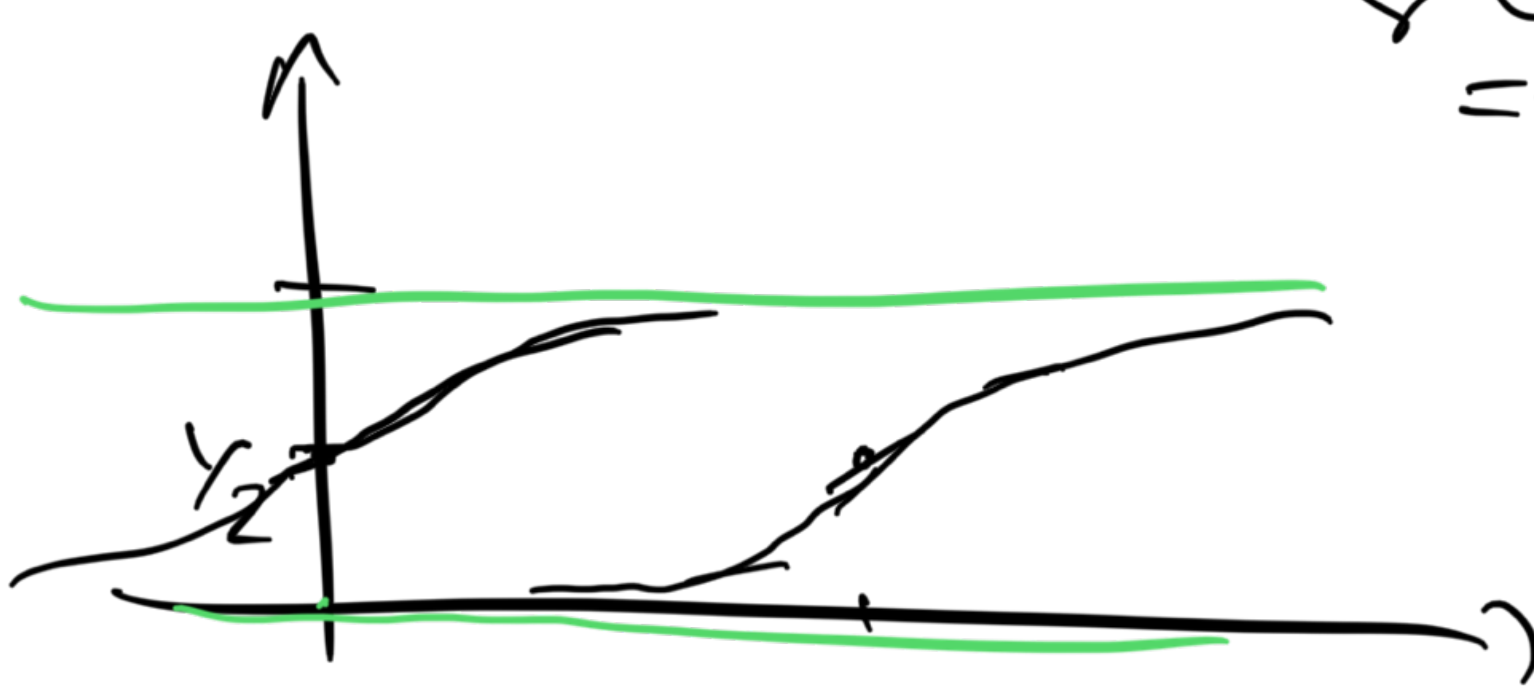


Kan visa: punkter i xy-planet som uppfyller (*) (för C fixt) är en sluten kurva.



Viktig egenskap hos <u>autonoma</u> ekvationer:

Betrakta: $\dfrac{dy}{dx} = \underbrace{y\cdot(1-y)}_{=f(x,y)}$



$t = 5$

(Samma lutning; $f(x,y)$ beror ej på x!).

Övning: Antag att $y_1(x)$ är lösning till

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

(eller merallmänt

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \Big).$$

Visa att även $y_2(x) = y_1(x+h)$

(där h är någon konstant)

är en lösning.