<u>SF1633 # 3</u>

Substitutioner (Kap 2.5).

Idé: <u>förenkla</u> ekv.

mha "fiffig" substitution.

<u>Ex</u>: "Homogena D.E.":

D.E. på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(y/x).$$ (Se bok för mer detaljer).

Variabelbyte: låt $u = y/x$

$\Rightarrow \quad y = u \cdot x \quad \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \cdot 1$$

∴ Ekv. blir då:

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = f(u),$$

dx

dvs (separabel!!)

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

kan lösas mha:

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

och integration.

<u>Ex</u>: Lös $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2-x^2}{xy} =$

$$2\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 2\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{(y/x)}$$

dvs $f(y/x)$ om vi tar

$f(t) = 2t - 1/t$. (Koll: sätt in $t = \frac{y}{x}$)

Med $u = y/x$ får vi

$$\frac{du}{dx}\cdot x + u = 2u - \frac{1}{u} = \frac{2u^2-1}{u}$$

$du \qquad 1 \qquad u^2-1$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = u - \frac{1}{u} = \frac{u^2 - 1}{u}$$

Om $f(t) = 2t - 1/t$

så blir $f\left(\frac{y}{x}\right) = 2 \cdot \frac{y}{x} - \frac{1}{y/x}$

och vi får:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{u^2-1} du = \frac{dx}{x}$$

Hur gå vidare?

Kursnämnd!?
1 person från varje program?

$$\frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2-1} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln|u^2-1| + \cancel{C_1} = \ln|x| + \cancel{C_2} + C$$

$$\rightarrow \ln|u^2-1| = 2\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow$$

(där $C = 2(C_2 - C_1)$)

(Anm: $\ln|0| = $!?
dvs förs. inträffar om $u = \pm 1$
dvs $\frac{x}{y} = \pm 1$, eller $y = \pm x$)

$$\ln|u^2-1| = \ln|x^2| + C = \ln x^2 + C$$

$$\Rightarrow e^{\ln|u^2-1|} = e^{\ln x^2 + C}$$

$$\Rightarrow |u^2 - 1| = x^2 \cdot e^C = x^2 \cdot D,$$

$D > 0$ $= e^C$

$u = y/x \Rightarrow$

$$\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| = D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$E = \pm D$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \pm D \cdot x^2 = E \cdot x^2,$$

$E \neq 0$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + Ex^4 \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + Ex^4}, \quad E \neq 0.$$

Anm: verifikation ger att $E=0$ också ok!

~~Ex:~~ Alt: $y = \pm\sqrt{x^2 \pm e^{c}x^4}$,

(godtagbar lösning).

Ex: Bernoulli-ekvationen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)\cdot y^n,$$

$n \neq 0, 1.$

(Obs: HL $= f(x)\cdot y^n$ ej linjärt!)

Skriv om

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x).$$

Låt nu $u = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$.

$$\frac{du}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{du}{dx}$$

$\therefore$ Ekvationen kan skrivas som:

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = f(x)$$

AHA!! Linjär!!

Metod: använd "linjärt knep", hitta u, lös sedan ut y (då $y = u^{\frac{1}{1-n}}$)

Linjära modeller (3.1).

Ex: Populationstillväxt:

modell: tillväxt proportionell

modell: ... proportionell
mot antal individer.
(barn $\propto$ vuxna
"proportionell mot")

Låt $P(t)$ vara antal
individer vid tid t.

Tillväxthastighet: $\frac{dP}{dt}$;
i vår modell har vi

$$\frac{dP}{dt} \propto P(t), \text{ dvs}$$

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{k}_{\text{konstant!}} \cdot P$$

Lösningen ges av $P(t) = C \cdot e^{kt}$

[Koll: VL $= P'(t) = C \cdot k \cdot e^{kt}$

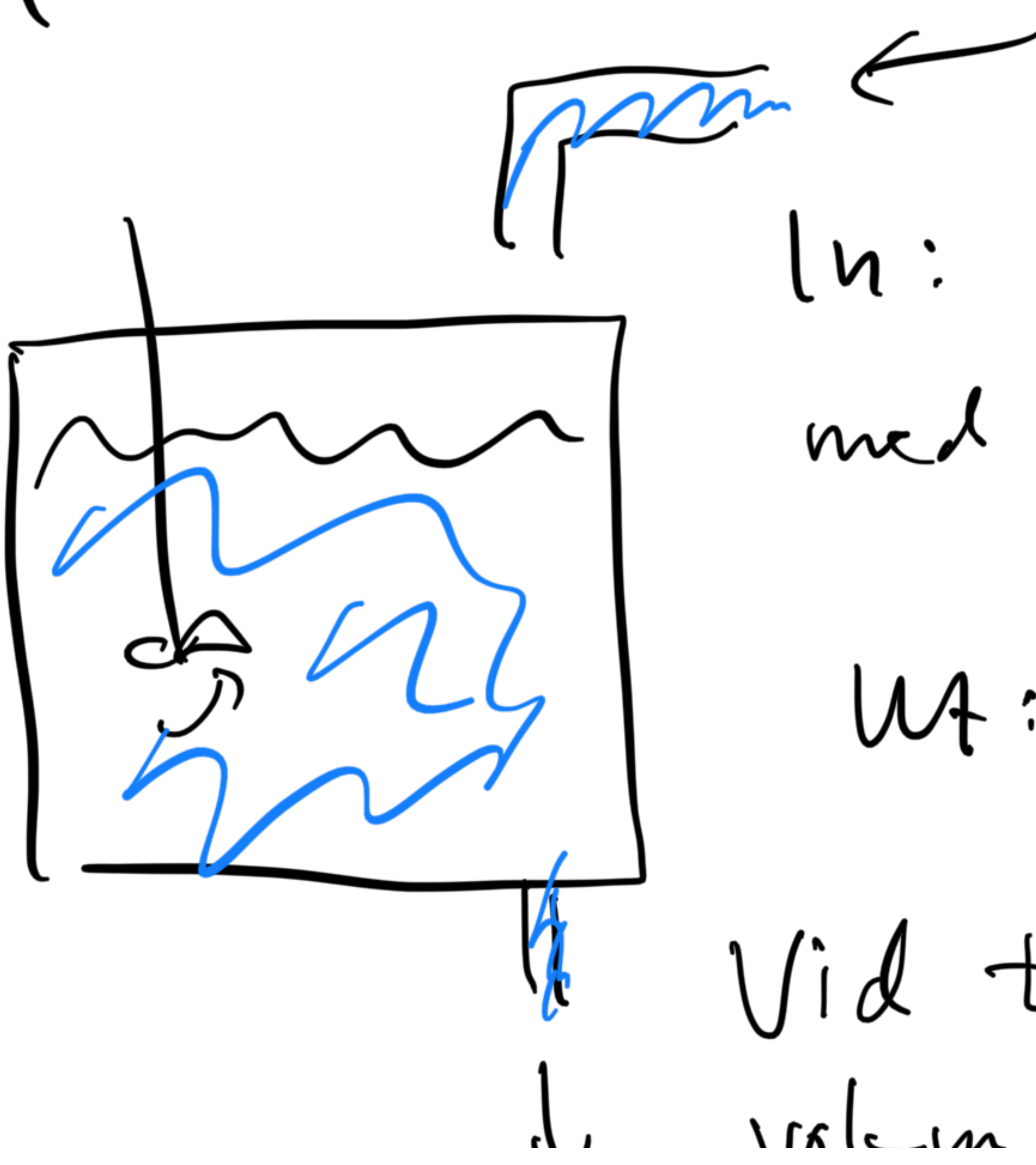
HL: $k \cdot P = k \cdot C \cdot e^{kt}$

∴ VL = HL, när en lösning
(för alla C !). ┘

<u>Anm</u>: $k > 0$: individen födda

$k < 0$: individen dör av;
kan användas som
modell för radioaktivt
sönderfall.

<u>Ex</u>: "Saltvattenkoncentration"
(se 1.3.)



In: 1 liter/min
med 2g salt/l.

Ut: 1 liter/min

Vid $t=0$:
volym vatten i

tank: 10 liter

med koncentration 4g/l.

Finn mängd salt (g) i tanken vid tid t.

Låt V vara volym vatten; klart att V = 10 (konstant)

Låt A(t) vara mängden salt.

$$A(0) = 10 \cdot 4 = 40 \ (g)$$

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{(\text{takt salt in})}^{R_i} - \underbrace{(\text{takt salt ut})}^{R_u}$$

$$R_i = 2 \cdot 1 = 2g \text{ salt/min}$$

$$R_u = \underset{l/min}{1} \cdot \frac{A(t)}{V} = \frac{A(t)}{10}.$$

$$(*) \quad \frac{dA}{dt} = 2 - \frac{A(t)}{10};$$

$A(0) = 40$ (BV!)

Anm: Om koncentrationen vid $t=0$ var $2g/l$ så är $A(t)$ konstant! Kolla om (*) säger samma sak?!

Ingen ändring $\Longleftrightarrow$ $\frac{dA}{dt} = 0$

Vi ser att $2g/l$ vid $t=0$

$\Rightarrow A(0) = 10 \cdot 2 = 20$ och

$$\frac{dA}{dt} = 2 - \frac{A(t)}{10} = 2 - \frac{20}{10} = 2-2$$

$= 0$, dvs ingen ändring!

Anm: $A' = 2 - A/10$

har kritiskt punkt

då $A = 20$, dvs $A(t) = 20$

$\forall t$ är en ekvilibriumlösning!

Tillbaka till (*):

$$\frac{dA}{dt} = 2 - \frac{A(t)}{10}, \quad A(0) = 40.$$

Hur? Kort!

$$A' = 2 - \frac{A}{10}.$$

~~Linjär~~ Linjär!

$$A' + \frac{1}{10} \cdot A = 2$$

$$\boxed{\frac{1}{e^{t/10}} = e^{-t/10}.}$$

IF: $e^{\int \frac{1}{10}\, dt} = e^{t/10}.$

Multiplikation med IF $\Longrightarrow$

$$\underbrace{A' \cdot e^{t/10} + \frac{1}{10} \cdot A e^{t/10}}_{=} = 2 \cdot e^{t/10}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(A \cdot e^{t/10} \right) = 2 \cdot e^{t/10}$$

dt ( )

(Kolla! =)

$$\Rightarrow A\cdot e^{t/10} = \int (2\cdot e^{t/10})\,dt$$

blir av med genom mult med $e^{-t/10}$.

$$= 20\cdot e^{t/10} + C$$

$$\Rightarrow A = A(t) = e^{-t/10}\left(20\cdot e^{t/10} + C\right)$$

$$= 20 + C\cdot e^{-t/10}.$$

C!? Använd BV!

BV: $A(0) = 40$, dvs

$$20 + C\cdot e^{-0/10} = 40$$

$$\Rightarrow C\cdot e^{0} = 20$$

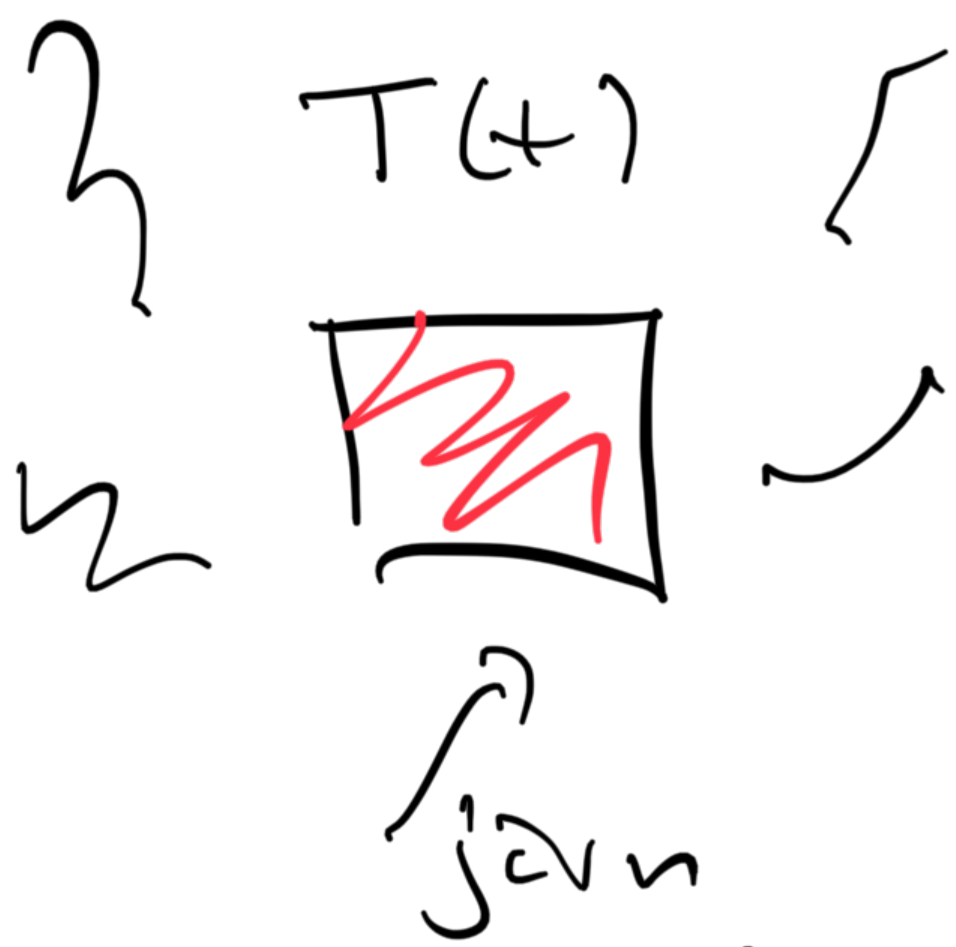
$$\Rightarrow C = 20. \quad (e^{0} = 1)$$

$$\therefore A(t) = 20 + 20\cdot \underbrace{e^{-t/10}}_{\to 0}.$$

Anm: $A(t) \longrightarrow 20$

då $t \to \infty$. Rimligt?

Ex: Newtons avsvalningslag



T_m: rums-temperatur.

Takten för temperatur-ändring är proportionell mot temperaturskillnaden mellan T & T_m.

Mer precist:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

temp — tid — prop. konstant

Påstående: $k < 0$.

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} - k \cdot T = -k \cdot T_m$$

(linjär ekvation!)

Ö: Kritisk punkt?

(dvs HL $k \cdot (T - T_m) = 0$)

Rimligt!?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2x^2} + y^2}{xy}$$

$$\frac{2y^2 - x^2}{xy}$$

~~y~~ $u = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$

Ta $y = x$. Koll:

$$VL: \frac{dy}{dx} = 1$$

$$HL: \frac{2y^2 - x^2}{xy} = \frac{2x^2 - x^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$\therefore VL = HL.$