SF1633, Förl #2 (Kap 2.1–2.3)

Riktningsfält (2.1)

Givet D.E.

(*) $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

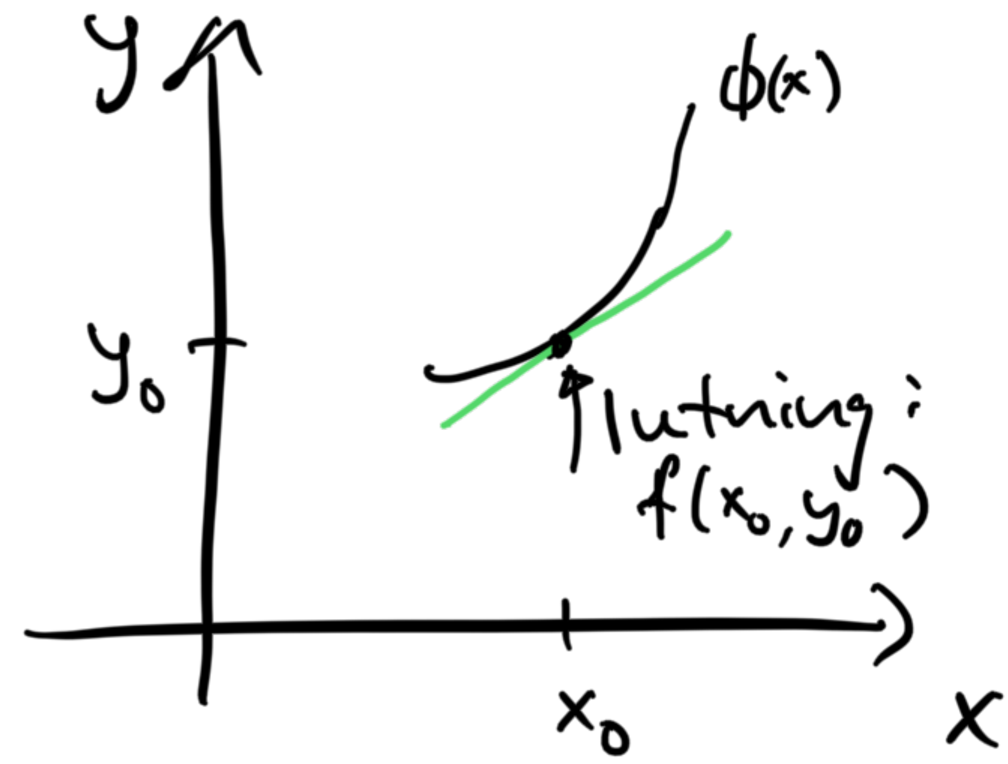


Fig 1.

t ex: $y' = \underbrace{2x+y}_{f(x,y)}$

I "varje punkt" (x,y), rita ut linjesegment med lutning $f(x,y)$ ("riktingsfält").

En lösning $y = \phi(x)$ (till (*)) som går genom (x_0, y_0) skall ha lutning $f(x_0, y_0)$ där, dvs

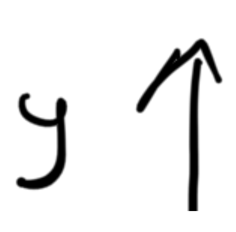
$\phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ (se fig 1.).

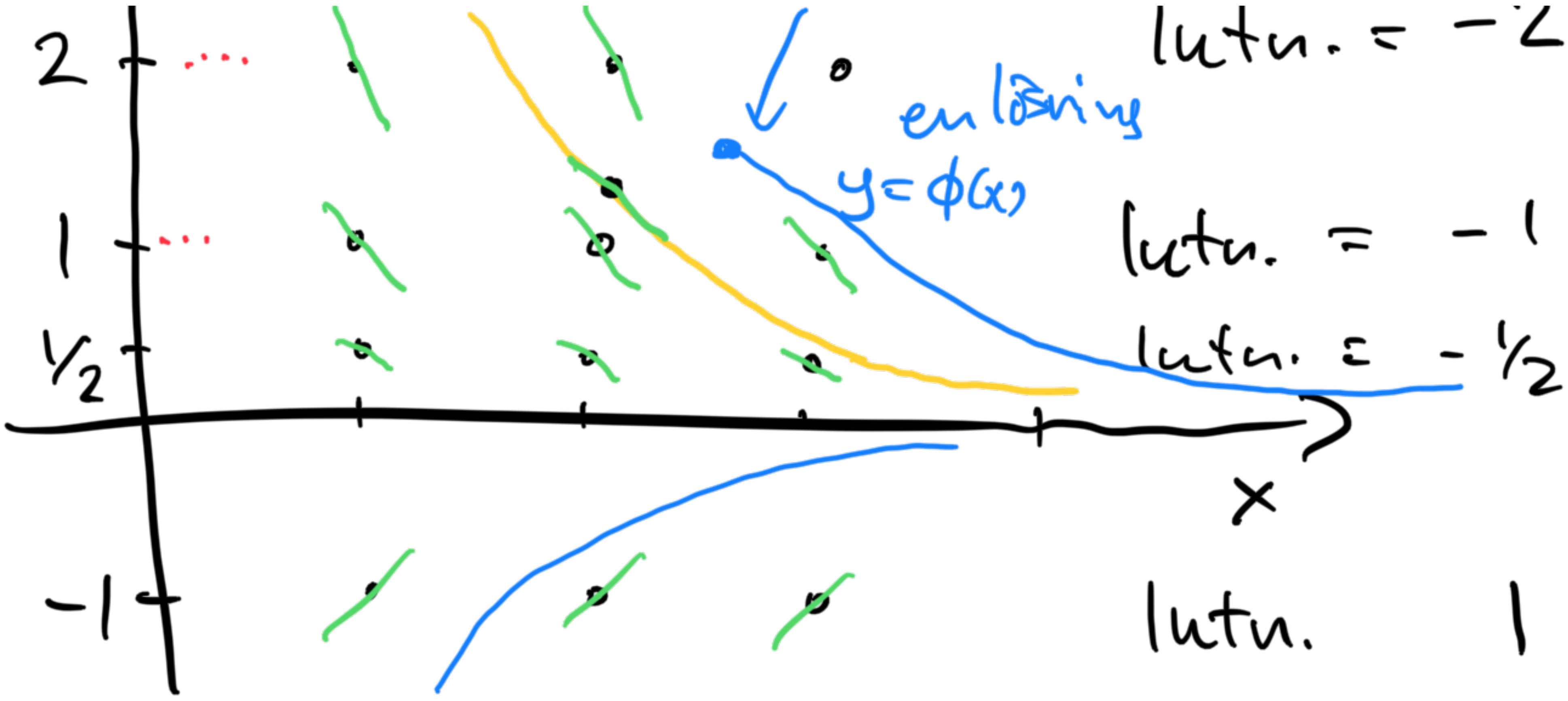
Ex Betrakta $\dfrac{dy}{dx} = \underbrace{-y}_{f(x,y)=-y}$. Rita riktningsfält:

BV: $y(x_0) = y_0$

(x_0, y_0)

$\boxed{f(x,y) = y}$





Anm.: $y = C \cdot e^{-x}$ är lösning för varje val av konstant C. Ser att alla lösningar går mot $\underline{0}$ då $x \to \infty$.

Autonoma ekvationer (ordning 1).

~~Ex~~. Ekv. på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \leftarrow$$ f beror $\underline{\text{ej}}$ på x.

$\underline{\text{Ex}}$: $\frac{dy}{dx} = y^2$ Autonom!

$\frac{dy}{dx} = y + x$ $\underline{\text{EJ}}$ autonom!

Ex: Betrakta autonoma ekvation

Ex: Betrakta autonoma ekvationen

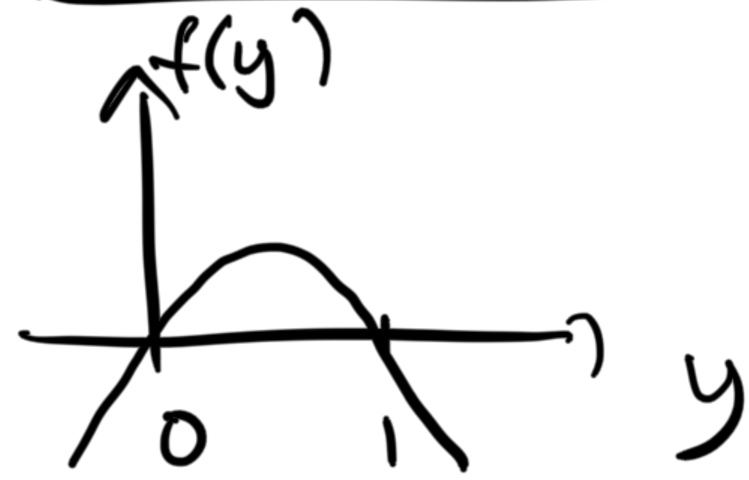
$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

("logistiska ekvationen" – från kemi eller pop. dyn.)

Här är $f(x,y) =$

$= f(y) = y(1-y)$.

Nollställena till $f = y(1-y)$, dvs $y=0$ eller $y=1$, kallas för <u>kritiska punkter</u>.



Nollställena ges oss de ~~två~~ konstanta ekvilibrium. lösningarna

$$y_1 = \phi_1(x) = 0 \quad \forall x$$

$$y_2 = \phi_2(x) = 1 \quad \forall x.$$

[Koll: (att y_2 är lösning)

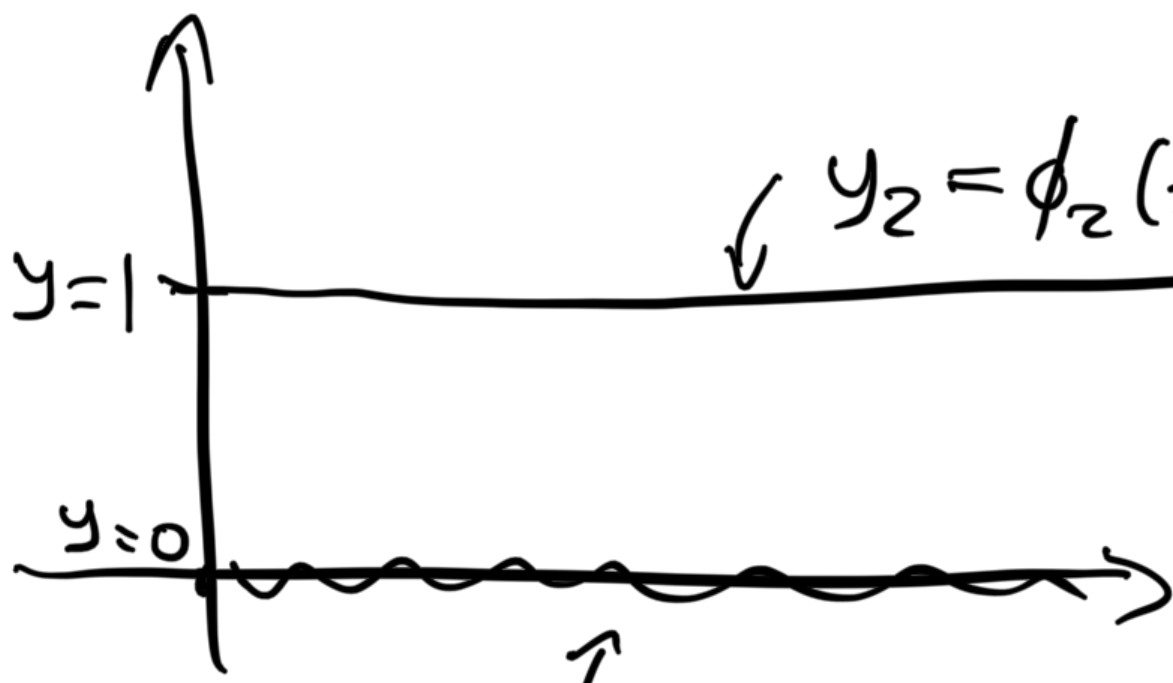
VL: $\cancel{\frac{dy}{dx}} \to \frac{dy_2}{dx} = 0 \quad \forall x$

HL: $y_2(x) \cdot (1 - y_2(x)) =$

$= 1 \cdot (1-1) = 0 \quad \forall x$

$\therefore$ VL = HL, och y_2 är

verkligen lösning!



$y_2 = \phi_2(x) = 1 \quad \forall x$

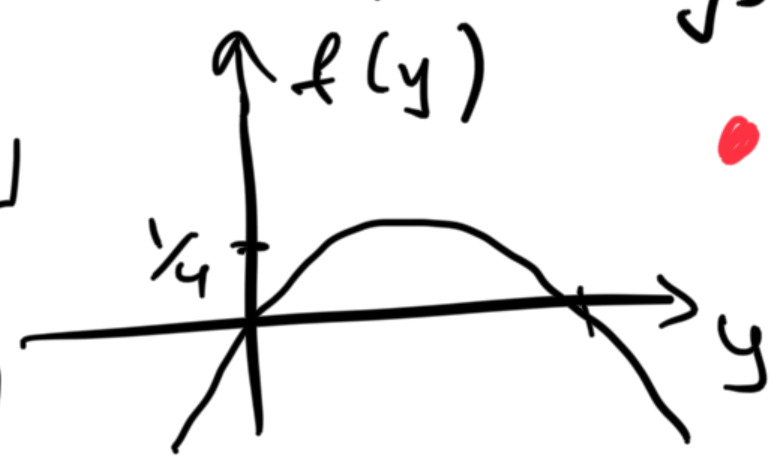
"för alla x".

$y_1 = \phi_1(x) = 0 \quad \forall x$

"för alla".

$A \curvearrowright \forall$

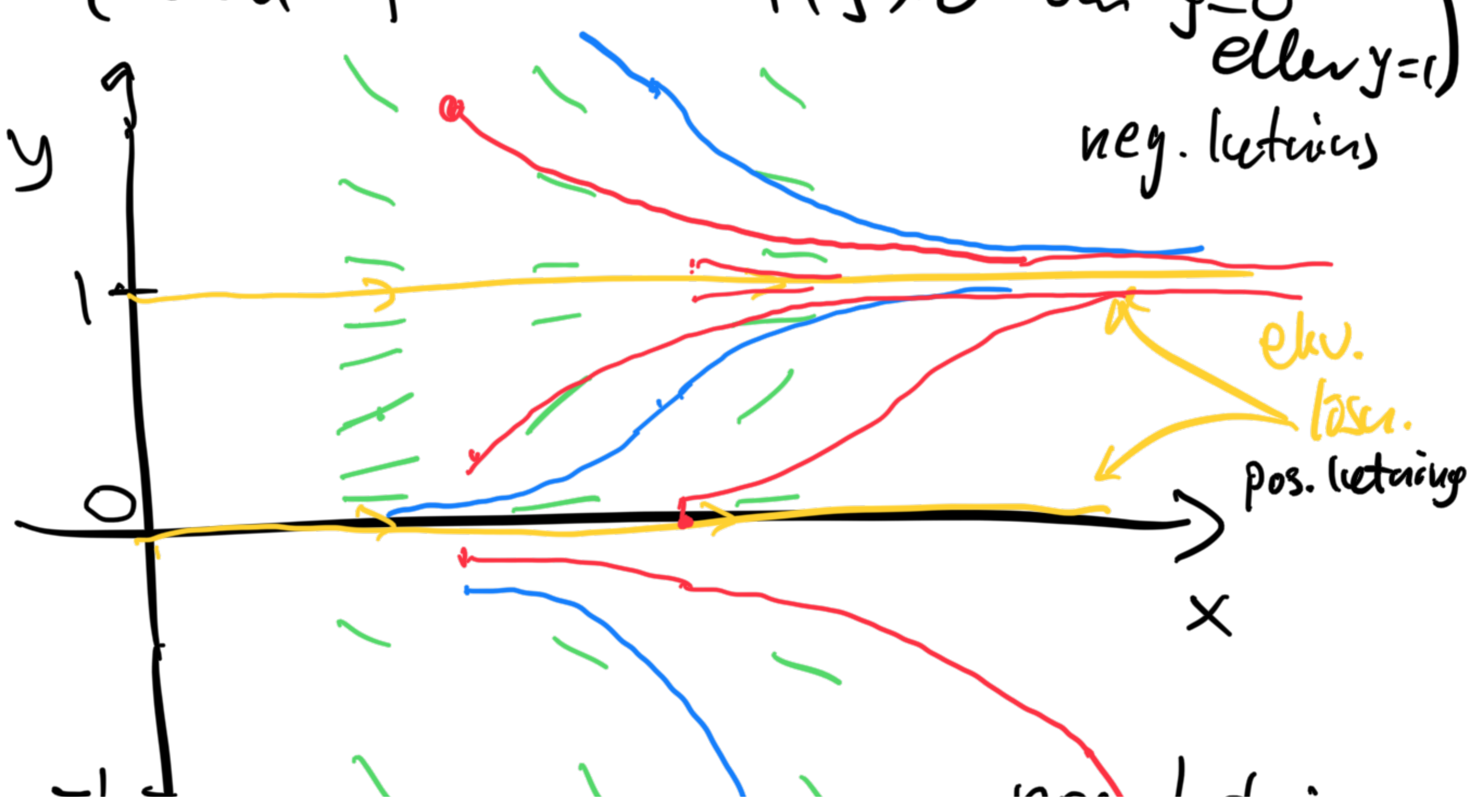
Undersök lösningarna mha riktningsfält. $\lceil f(y) = y(1-y) \rfloor$



Notera: $f(y) > 0$ för $0 < y < 1$

och $f(y) < 0$ för $y < 0$ eller $y > 1$.

(och påminn: $f(y) = 0$ om $y = 0$ eller $y = 1$)



neg. lutning

Anm: Då f & $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga så kan lösningskurvor ej korsa varandra!

Anm: Betrakta BVP $y(x_0) = y_0$

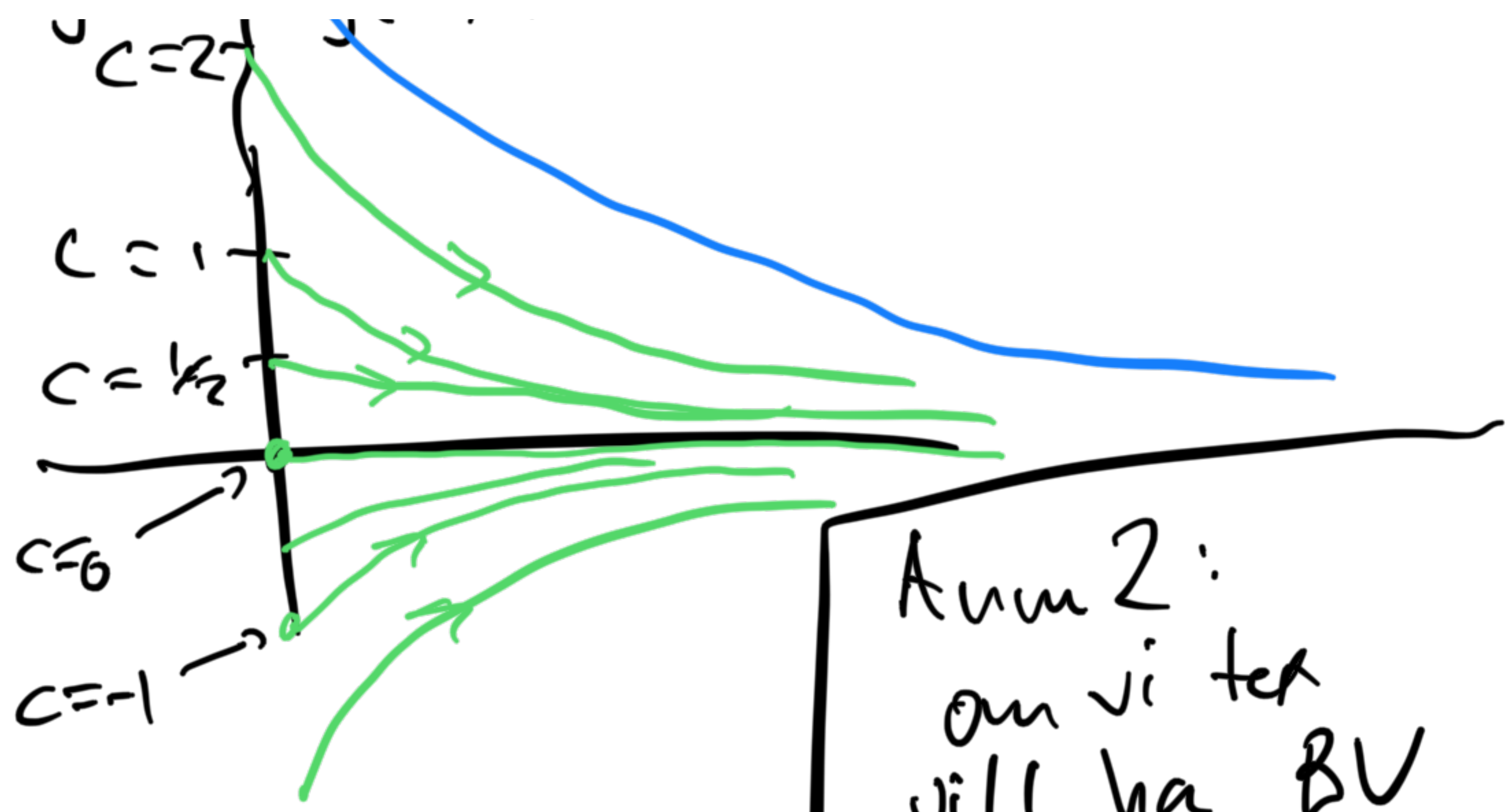
- Om $0 < y_0 < 1$ så gäller: $0 < y(x) < 1$, och $y(x) \to 1$ då $x \to \infty$.

- Om $y_0 > 1$ så gäller $y(x) \to 1$.

- Om $y_0 < 0$ (negativ population!?) så (kan man visa) att $y(x) \to -\infty$ då $x \to x_{\text{pang}} < \infty$.

Ex: $\frac{dy}{dx} = -y$. ← Anm: inget BV!

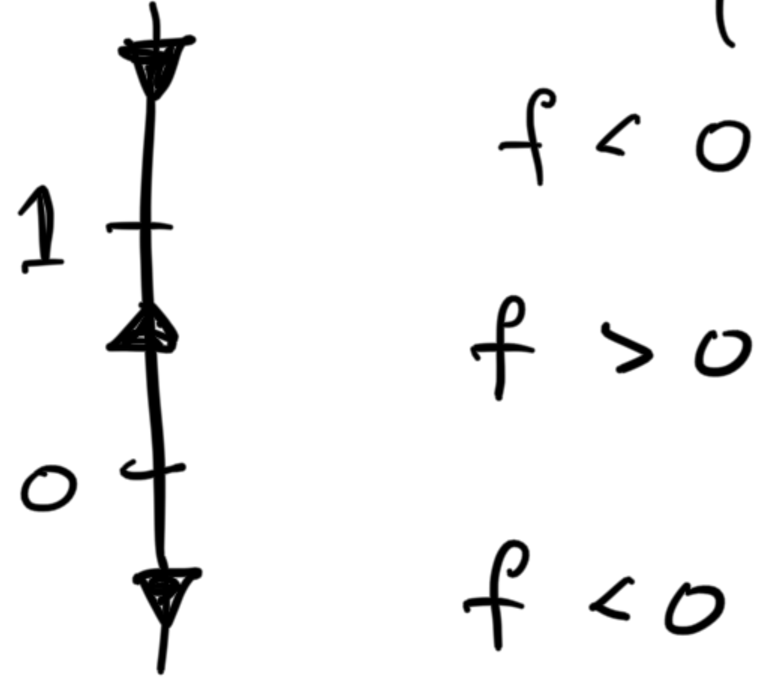
Sig: $y(x) = c \cdot e^{-x}$ är lösning



Anm 2: om vi ter vill ha BV $y(0)=3 \Rightarrow$

$y(x) = 3 \cdot e^{-x}$

Kan rita fasporträtt: (eller faslinje)



$\left[\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \underbrace{y(1-y)}_{=0 \text{ om } y=0 \text{ eller } y=1} \right]$

Kap 2.2 (separabla ekv.)

D.E. på formen $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

Dessa kan lösas så här:

skriv om som:

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (*)$$

$q(y)$

Låt nu $Q(y)$ vara <u>primitiv</u> till $q(y)$, dvs $Q'(y) = q(y)$ och $G(x)$ primitiv till $g(x)$.

<u>Om</u> $y(x)$ uppfyller ekvationen

$$Q(y) = G(x) + C$$

$Q(y(x))$

godtycklig konstant

Så är $y(x)$ lösning till $(*)$!

Koll: derivering av

$Q(y(x)) = G(x) + C$ ger:

$$Q'(y(x)) \cdot y'(x) = G'(x) \Rightarrow$$

$$q(y(x)) \frac{dy}{dx} = g(x), \text{ dvs}$$

$$q(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x), \text{ dvs } \frac{dy}{dx} = g(x) h(y).$$

Lösning: givet ekv.

$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, Skriv om:

$f(y)\,dy = g(x)\,dx$ och integrera!

Dvs: får $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

som då ger: $Q(y) = G(x) + C$

Ex: Lös D.E. $\frac{dy}{dx} = y^2$.

Lösn: Skriv på formen

$\frac{1}{y^2}\,dy = dx$. Integrering ger:

$\int \frac{dy}{y^2} = \int 1\,dx \Rightarrow$

$-\frac{1}{y} + C_1 = x + C_2 \Rightarrow$

$-\frac{1}{y} = x + C$ (om $C = C_2 - C_1$)

$\therefore\ y = \frac{-1}{x+C}$, C godtycklig konstant.

Ex a): lös BVP $\frac{dy}{dx} = y^2$

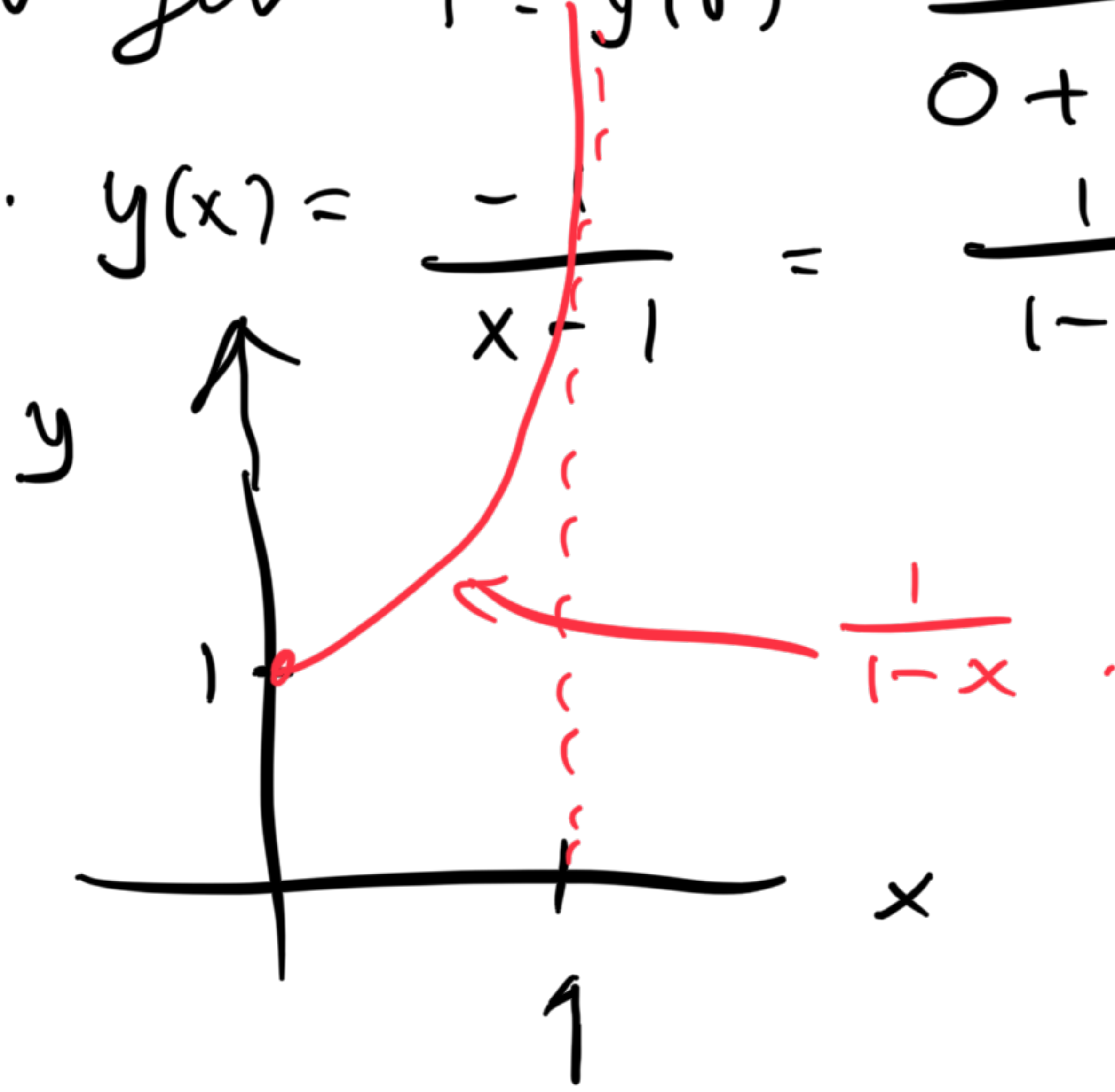
och $y(0) = 1$.

b) lös BVP $\frac{dy}{dx} = y^2$, $y(0) = 0$.

a): Har sett: $y = \frac{-1}{x+C}$;

BV ger $1 = y(0) = \frac{-1}{0+C} \Rightarrow C = -1$.

$\therefore y(x) = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$



b) b.v. $0 = y(0) = \frac{-1}{0+C}$. Hmm!?

Missat nåt!

Notera: när vi skrev om

som $\frac{dy}{y^2} = dx$ så (implicit)

så antog vi att $y \neq 0$

Ser nu: $y(x) = 0 \quad \forall x$

ger faktiskt ytterligare

en lösning (till $y' = y^2$).

Lurigt: fanns inte med i familjen $y = \frac{-1}{x+C}$.

Linjära ekvationer (Kap 2.3).

Ekv. på formen

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Lös hur? Jo:

Skriv om $(a_1(x) \neq 0)$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

(dividera med $a_1(x)$!)

Multiplicera sedan med "integrerande faktorn" (IF)

$$e^{\int P(x)\,dx}$$

(dvs $\int P(x)\,dx$ är primitiv till $P(x)$.)

Får då:

$\int P(x)dx$ $\int P(x)dx$

$\int P(x)dx$

$(*)\ e^{\int P(x)dx}\dfrac{dy}{dx} + P(x)\cdot e^{\int P(x)dx} y = f(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$

Notera! $\dfrac{d}{dx}\left(y\cdot e^{\int P(x)dx} \right) =$

$\dfrac{dy}{dx}\cdot e^{\int P(x)dx} + y\, P(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$

$\therefore$ $(*)$ Kan skrivas som:

$\dfrac{d}{dx}\left(y\cdot e^{\int P(x)dx} \right) = f(x) e^{\int P(x)dx}$.

Integrering ger:

$y\cdot e^{\int P(x)dx} = \int \left(f(x) e^{\int P(x)dx} \right) dx$

Lös sedan ut y!

Ex: Lös ekv.

$\dfrac{dy}{dx} - xy = x$, dvs

$\dfrac{dy}{dx} + (-x)\cdot y = x$

$$\frac{dy}{dx} + (-x)y = x.$$

[Här är $P(x) = -x$ och $f(x) = x$.]

Mult. med integrerande faktorn $e^{\int(-x)dx} = e^{-x^2/2 + c}$

ger: (tag $c = 0$)

$$e^{-x^2/2}\frac{dy}{dx} + (-x)e^{-x^2/2}y = x \cdot e^{-x^2/2}$$

som kan skrivas som

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-x^2/2}\right) = x \cdot e^{-x^2/2}.$$

Integrering ger nu:

$$y \cdot e^{-x^2/2} = \int x \cdot e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= -e^{-x^2/2} + C$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2/2}\left(-e^{-x^2/2} + C\right) =$$

$$= -1 + C \cdot e^{x^2/2}$$

(där C är godtycklig konstant).

Övn.: Kolla lösningarna.

Faktum: samtliga lösningar till ekv. är på denna form.

$y = -1 + C \cdot e^{x^2/2}$ sägs vara den <u>allmänna lösningen</u> till ekvationen.