SF1633, #17 (Laplacetransform, forts.)

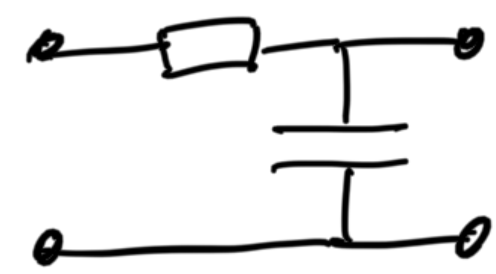
"diskontinuerlig drivning"

<u>Ex</u> (forts.) Lös BVP

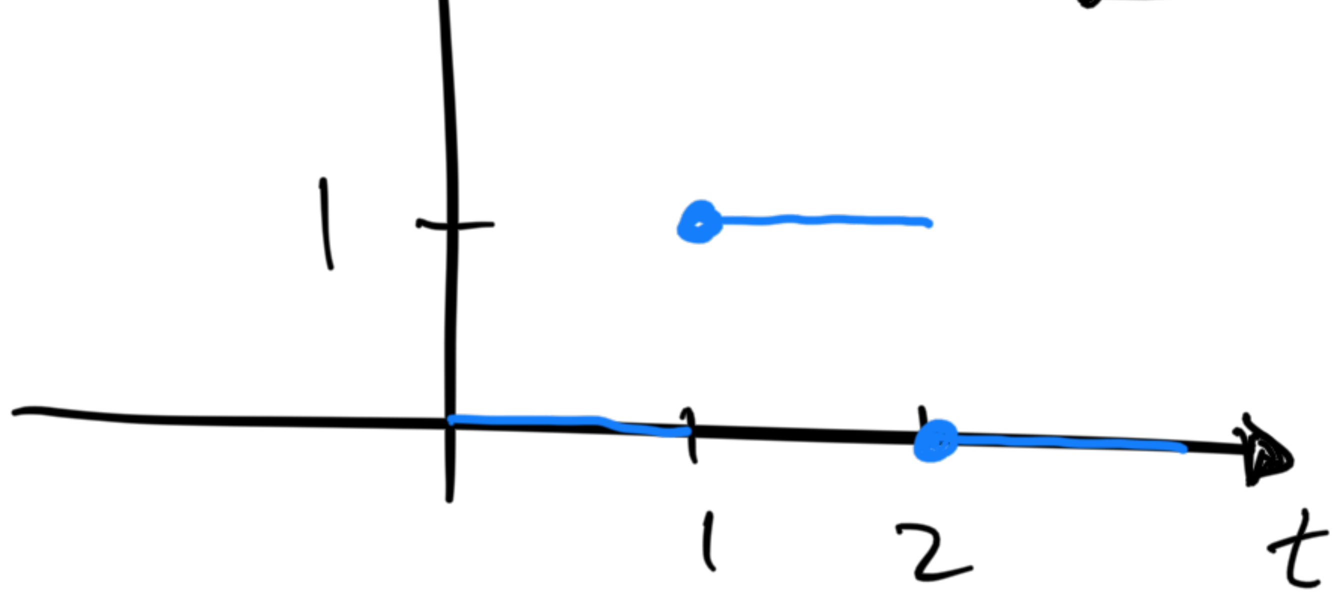
$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0$$

då $f(t) = \begin{cases} 1 & 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

t (



<u>Lösning</u>:



$\therefore$ $f(t)$ kan skrivas som

$$f(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

Laplacetransform ger:

$y'(t)$
$\downarrow$ $= s \cdot Y(s)$
$s \cdot Y(s) - y(0)$

$$s \cdot Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} - \mathcal{L}\{u_2(t)\}$$

$$Y(s)\cdot(s+1) = \frac{e^{-1\cdot s}}{s} - \frac{e^{-2\cdot s}}{s}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

$$= \frac{1}{s(s+1)}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 1 - e^{-t}.$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}H(s) - e^{-2s}H(s)\} \quad (\text{från } (1)).$$

$$= u_1(t)\cdot\left(1 - e^{-(t-1)}\right) - u_2(t)\left(1 - e^{-(t-2)}\right)$$

Kan skriva:

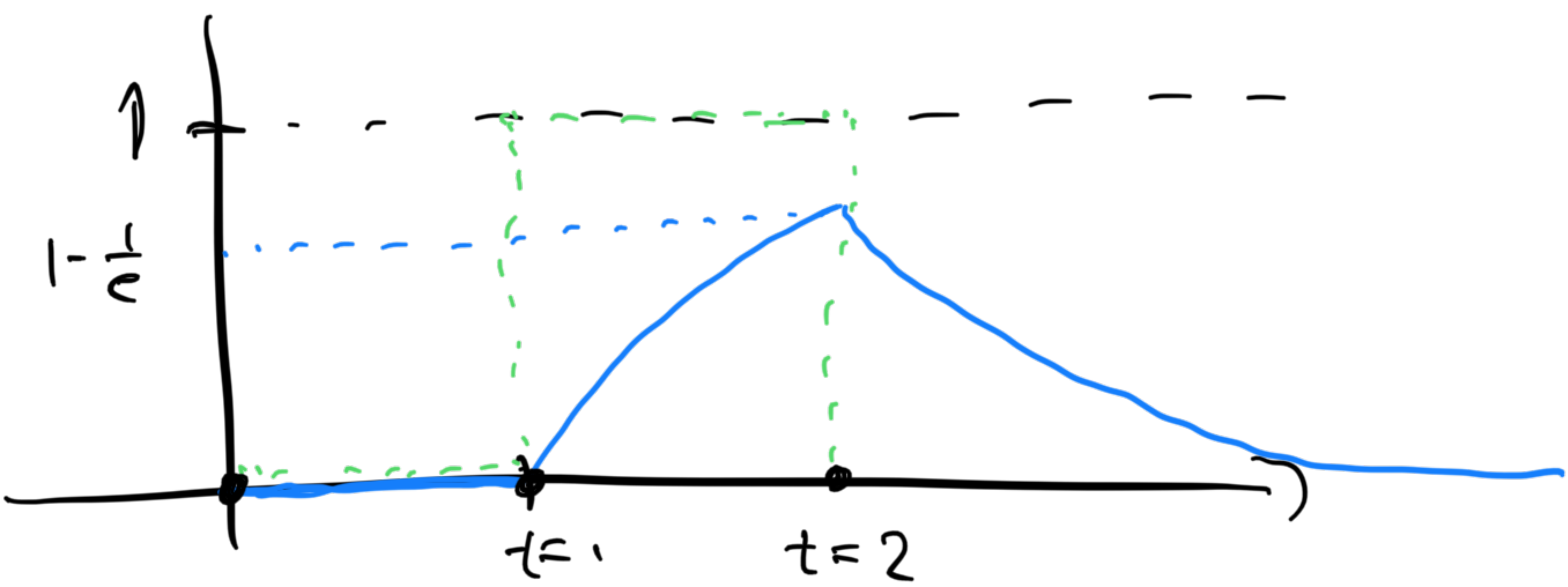
$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad \\ 1-e^{-(t-1)} - \left(1-e^{-(t-2)}\right) & t \geq 2 \\ = -e^{-(t-1)} + e^{-(t-2)} = e^{-(t-2)}\left(1-e^{-1}\right) \end{cases}$$

$\Big[$ (i): $\mathcal{L}\{u_c(t)\cdot f(t-c)\} = e^{-cs}\cdot F(s)$

(vi använder (i) "baklänges") $\Big]$

Skiss av $y(t)$:



Koll? $t=1$: $\quad 0 \quad$ vs $\quad 1-e^{-(1-1)}$

$= 1-e^{-0} = 1-1 = 0$

OK!

$t=2$: $1-e^{-(2-1)}$ vs $e^{-(2-2)}\left(1-e^{-1}\right)$

$\quad\quad\ \ = 1-e^{-1} \quad\quad\quad = e^{-0}\left(1-e^{-1}\right) = 1\cdot\left(1-e^{-1}\right)$

OK!

Faltning (Kap 7.4)

("convolution" på engelska).

Laplacetransform: $f(t) \to F(s)$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

Anta nu att $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$,

$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

f	$F = \mathcal{L}\{f\}$	
$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$	(linjär!)
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s)$	
??	$F(s) \cdot G(s)$	

Dvs: vilken funktion $h(t)$ har Laplacetransform $H(s) = F(s) \cdot G(s)$?

Sats Om $h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$

så är $H(s) = F(s) \cdot G(s)$

Så av

Anm: skriver $h = f * g$;

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Kallas: "faltningen av f & g".

Egenskap: $f * g = g * f$

Bevisskiss: $\mathcal{L}\{f*g\} = F(s)\cdot G(s)$

$$= G(s)\, F(s) = \mathcal{L}\{g*f\}$$

Tag $\mathcal{L}^{-1}$ på båda sidorna, och vi får: $f*g = g*f$.

[Alt. sätt: låt $u = t - \tau$ (variabelbyte!) räkna sedan på!

ÖÖ: gör detta.]

Ex (hur faltning används):

Ex (när faltning används):

Lös integralekvationen

$$y(t) = 4t - 3 \cdot \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

$y * \sin$

Lösning: Integralen svarar mot i

skriv om som

$$y(t) = 4t - 3 \cdot (y * g)(t)$$

om vi låter $g(t) = \sin(t)$.

Laplacetransform av VL & HL ger:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2} - 3 \cdot Y(s) \cdot G(s)$$

$$= \frac{4}{s^2} - 3\,Y(s)\,\frac{1}{s^2+1}$$

[Tabell: $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$, $\mathcal{L}\{\sin t\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1}$]

$$\Rightarrow Y(s)\left(1 + 3 \cdot \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(\frac{s^2+1+3}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s^2}$$

tabell!

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s^2} \cdot \frac{s^2+1}{s^2+4}$$

$$= \frac{4\,\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}(s^2+4)} + \frac{4 \cdot 1}{s^2(s^2+4)}$$

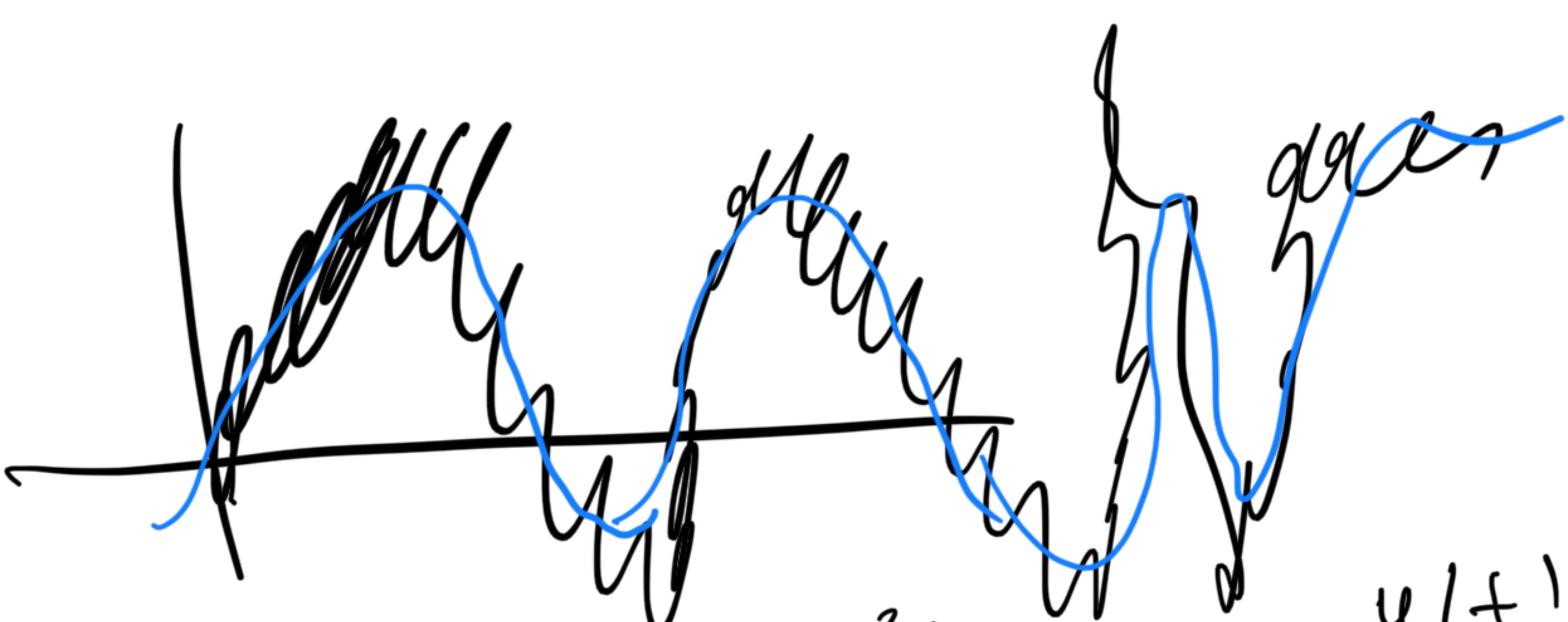
tabell! tabell!

$$\Longrightarrow$$

$$y(t) = 2\sin(2t) + \frac{4(2t - \sin 2t)}{8}$$

$$= t + \frac{3}{2}\sin(2t).$$

[Alt: partial ~~brös~~ bråksuppdelning!]



$g(t) = e^{-t^2/2}$

$y(t)$

$= f(t) + n(t)$

"noise"

$y * g$

Anm: Om vi inte hittar

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)}$$ i tabell !?

Part. bråksuppdelning:

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^4+4}$$

räkna på: ger $A=0$

$B=1$, $C=0$, $D=-1$

$$\Longrightarrow \frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}$$

Fiffigt: "vet" att bara

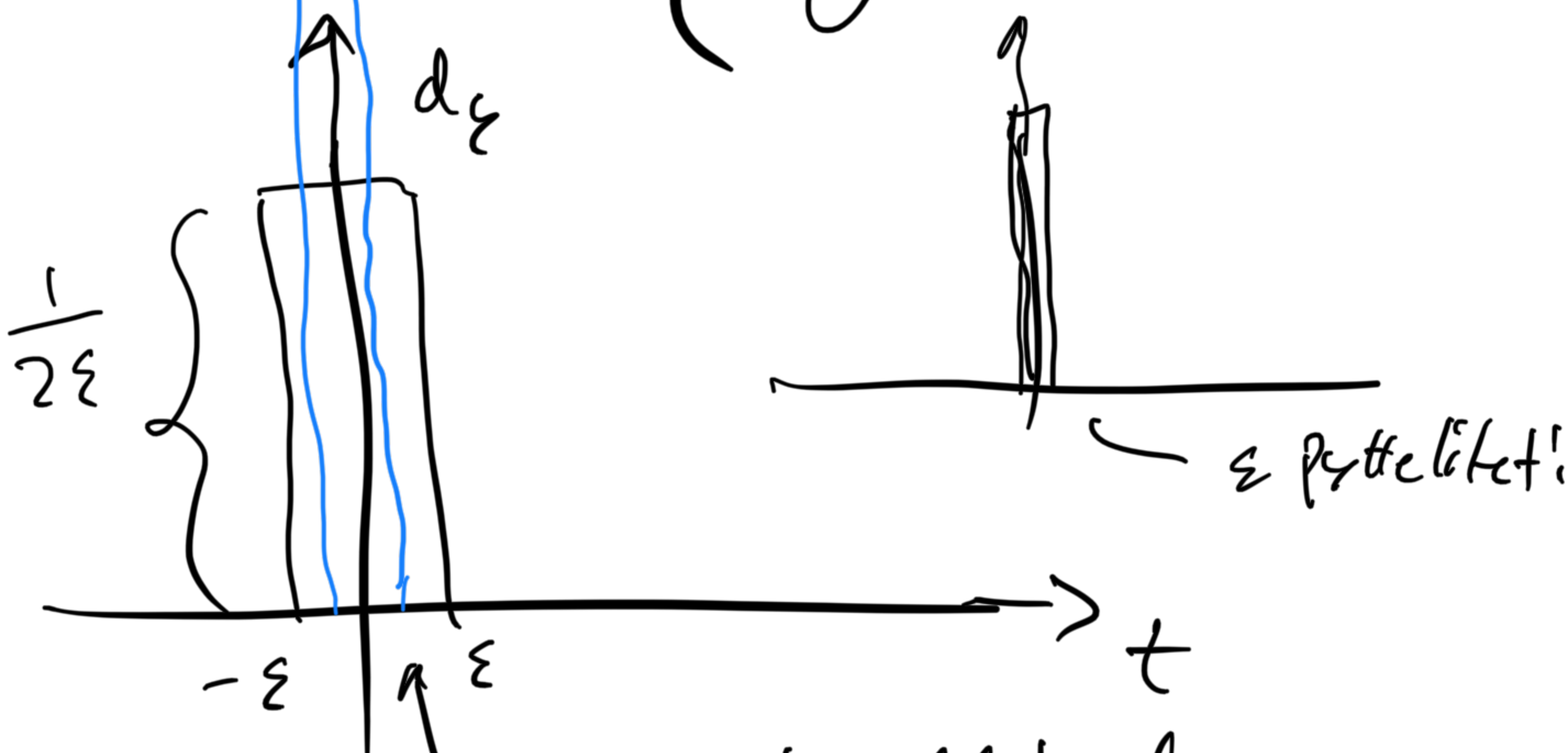
$$\frac{B}{s^2} \ \& \ \frac{D}{s^2+4}$$

Kan förekomma!

$$\left(\text{tag ex } u = s^2 \Longrightarrow \frac{4}{u(u+4)} = \dots\right)$$

~~Da~~ Diracs deltafunktion ("impulsfunktion"), 7.5.

Ex: $d_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{om } -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



Arean: bredd · höjd =

$$= 2\varepsilon \cdot \frac{1}{2\varepsilon} = 1$$

Poäng: konstant area, och area = "styrka" hos funktionen.

"styrka": $I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t)\,dt =$

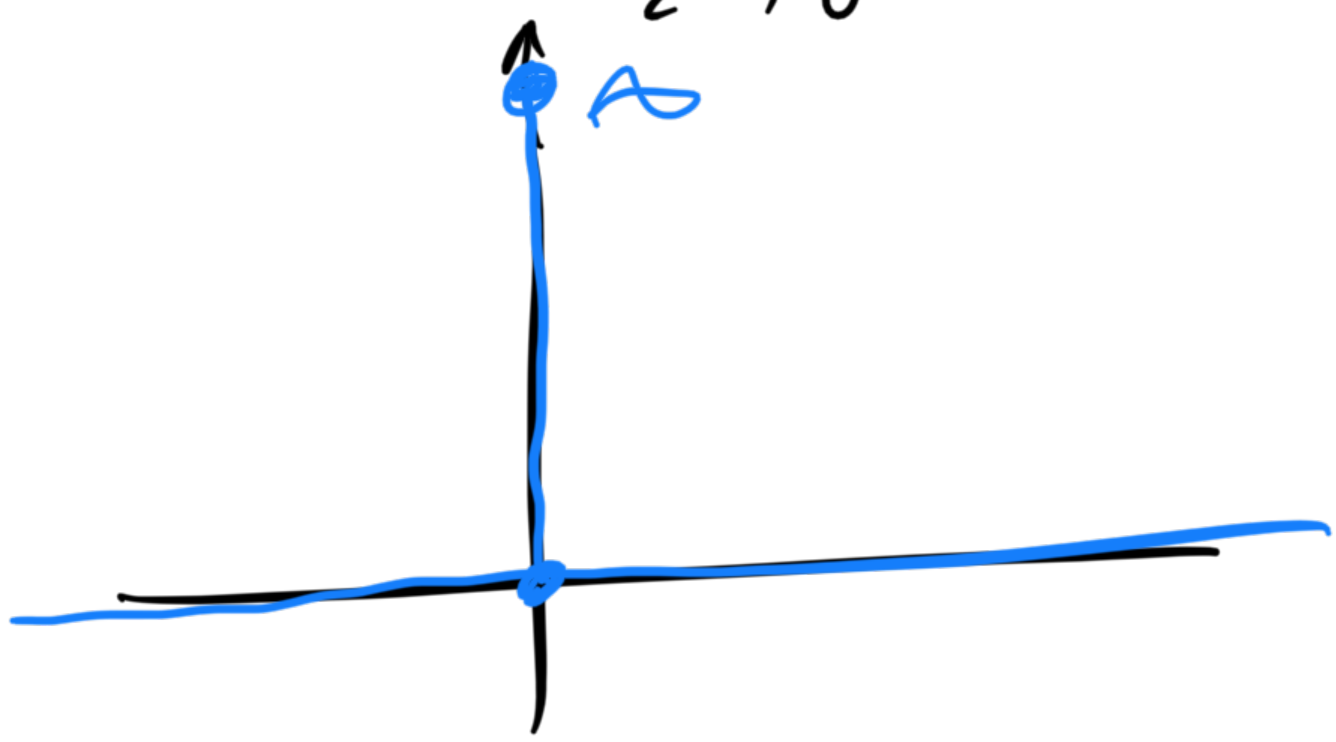
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1\,dt = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon = 1$$

$$= \int_{-\varepsilon} \frac{\quad}{2\varepsilon}\, dt = \frac{\quad}{2\varepsilon}$$

"konstant styrka".

Anm: $\lim_{\varepsilon \to 0^+} d_\varepsilon(t) = 0$ för alla $t \neq 0$

och: $\lim_{\varepsilon \to 0^+} I(\varepsilon) = 1$.



Dirac's deltafunktion: en "funktion" δ så att $\delta(t) = 0$ för $t \neq 0$

och $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$.

(Finlir: δ är en distribution eller "generaliserad funktion")

FQ: $\mathcal{L}\{\delta\} = ? = 1$

$$\mathcal{L}\{\delta * f\} = \mathcal{L}\{\delta\} \cdot F(s) = 1 \cdot F(s) = $$

Dvs: $\delta * f = f$. $\lrcorner$

$\mathcal{L}\{\delta\} = 1$: motivation:

Tag $t_0 > 0$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{L}\{d_\varepsilon(t-t_0)\}$$

$|t-t_0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$

Vi har: $\mathcal{L}\{d_\varepsilon(t-t_0)\} =$

$$= \int_0^\infty e^{-st} d_\varepsilon(t-t_0)\,dt = (\text{om } \varepsilon < t_0)$$

$d_\varepsilon(\tau) = 0$ om $|\tau| > \varepsilon$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{-st} \cdot \frac{1}{2\varepsilon}\,dt$$

Om ε "pyttelitet"

approx!

$$\Rightarrow e^{-st} \simeq e^{-st_0} \quad \text{på } [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$$

(kontinuitet!)

Så: $$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{-st} \frac{dt}{2\varepsilon} \simeq e^{-st_0} \underbrace{\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dt}_{=1}$$

$$= e^{-st_0} \quad (\text{se sats } 7.5.1$$

för detaljer!)

$$\therefore \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \quad (t_0 > 0)$$

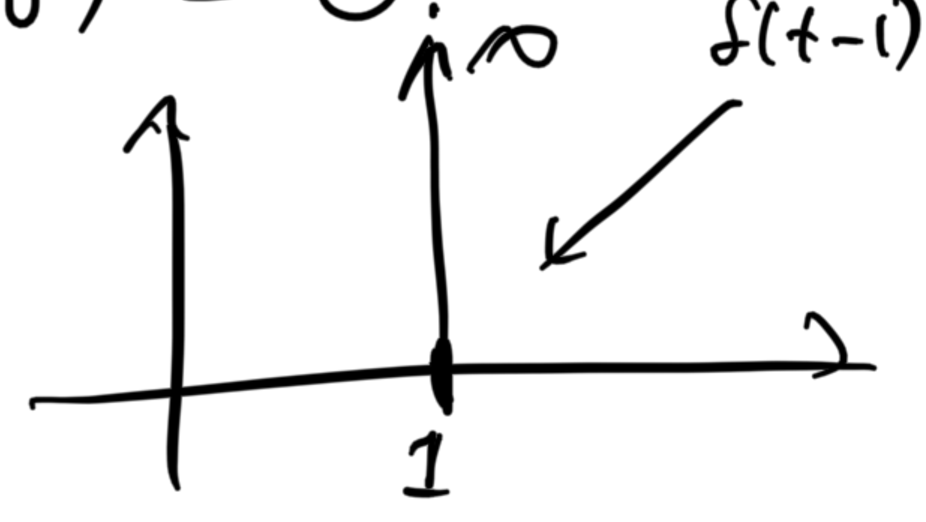
Låt nu $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \to 0^+} \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$

$$= \lim_{t_0 \to 0^+} e^{-st_0} = e^{-s \cdot 0} = e^{-0} = 1.$$

Punchline: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$

<u>Ex</u>: Lös BVP $y'' + y = \delta(t-1)$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$



<u>Lösning.</u>: Laplace på HL & VL

ger: $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y(s)$

(då $y(0) = y'(0) = 0$)

$$s^2 \cdot Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$$

① $\mathcal{L}\{\delta\} = 1$

② $\mathcal{L}\{f(t-c)\} = e^{-cs}\cdot F(s)$

enligt tidigare regler

$$\Rightarrow Y(s)\,(s^2+1) = e^{-s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

Notera: Om $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

så är $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\,F(s)\} = u_c(t)\cdot f(t-c)$

c-shift

$u_c(t)$: $\begin{cases} = 1 & \text{om } t \geq c \\ = 0 & \text{om } t < c \end{cases}$

$c = 1$

Ur tabell:

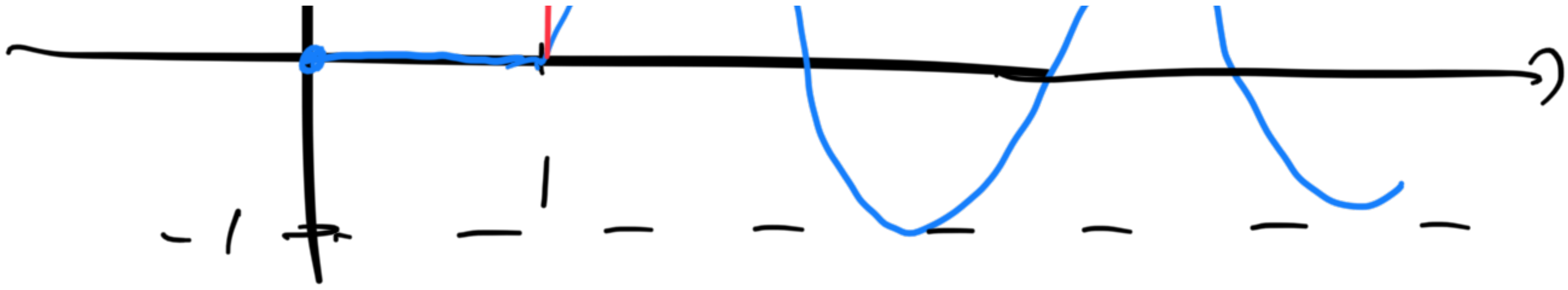
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin(t)$$

$\Longrightarrow$ shift!

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-1\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} =$$

$$u_1(t)\cdot\sin(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq t < 1 \\ \sin(t-1) & \text{om } t \geq 1 \end{cases}$$

Skiss



$$y'' + y = 0$$

~~"Slå~~ "Slå på fjäder med en slägga vid $t = 1$".