SF1633, #16, Laplace-transformer (Kap 7).

$$\boxed{f} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \boxed{F}$$

(beror på t)

<u>Def</u>: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) =$

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt \quad \left(= \lim_{A \to \infty} \int_0^A \ldots \right)$$

<u>Ex</u>: Låt $f(t) = 1 \quad (t \geq 0)$

Vad är $F(s)$??

<u>Lösn.</u>: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\,dt =$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st}\,dt = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^{A}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{-e^{-sA}}{s} + \frac{e^{-s\cdot 0}}{s} \right)$$

$$= (\text{om } s>0) = 0 + \frac{e^{-0}}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\therefore F(s) = \frac{1}{s} \quad (\text{om } f(t) = 1).$$

<u>$s = -1$</u> $\quad \lim_{A\to\infty} e^{-s\cdot A} = \lim_{A\to\infty} e^{A} = \infty.$

<u>Finlir</u>: Om $f(t) \le C\cdot e^{at}$ så är $F(s)$ definierad för $s > a$.

Anm: när vi jobbar med Laplace använder vi oss oftast av tabell.

Viktig ~~a~~ egenskap:

Antag att $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

och

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - sf(0) - f'(0)$$

(etc).

1. $\mathcal{L}$ "gör om" derivering till multiplikation med s
2. $\mathcal{L}$ håller reda Begynnelse värden!

MYCKET användbart för att lösa D.E. !

Ex: Betrakta BVP

$$y' - y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Laplace transform av VL & HL

$\Longrightarrow$ [Anm: $\mathcal{L}\{0\} = 0$].

$$0 = \mathcal{L}\{0\} = \mathcal{L}\{y' - y\}$$

$$= \mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} \quad \text{(\underline{linjär!}!)}$$

$$= \overbrace{s \cdot Y(s) - y(0)}^{\mathcal{L}\{y'\}} - Y(s) =$$

$$= (s-1)\cdot Y(s) - \overbrace{1}^{y(0)}$$

$$\Longrightarrow (s-1)Y(s) = 1 \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Ur tabell: $\dfrac{1}{s-1} = \mathcal{L}\{e^t\}$

dvs $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} = e^t$.

$$\therefore\; y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= e^t.$$

$$\therefore\; y(t) = e^t.$$

Övning: visa / räkna själv och

se att $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$,

dvs $\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^t\,dt = \frac{1}{s-1}$

$$\int_0^\infty e^{(1-s)\cdot t}\,dt = \left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right]_0^\infty =$$

$$= \cancel{(s>0)}\quad \frac{e^{(1-s)\cdot\infty}}{1-s} - \frac{e^{(1-s)\cdot 0}}{1-s}$$

~~0 om s>0~~

~~(om s>1)~~

FEL!

$$= 0 - \frac{e^0}{1-s} = \frac{1}{s-1}.$$

Aha!

RÄTT: $\lim_{A\to\infty} e^{(1-s)\cdot A} = 0$ om

$s > 1$.

Ex Lös BVP

$$y''-y = e^{2t}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s\cdot y(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$

Lösn.: Laplace transform ger:

$(s^2-1)\cdot Y(s)$

$$s^2 Y(s) - Y(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

ur tabell!

$$\Rightarrow Y(s)(s^2-1) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-1)(s+1)$$

?

$$\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-2)}$$

Kan hända: Finns ej i tabell!

Hur hitta $y(t)$?

Använd partialbråksuppdelning!

~

Anm: viktig egenskap (2):

$\mathcal{L}$ är linjär!

Dvs $\mathcal{L}\{c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)\}$

$$= c_1 \cdot \mathcal{L}\{y_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{y_2(t)\}$$

$$= c_1 \cdot Y_1(s) + c_2 \cdot Y_2(s)$$

(där $Y_i(s) = \mathcal{L}\{y_i(t)\}$, $i = 1,2$)

Anm: Även inverstransformen $\mathcal{L}^{-1}$ är linjär.

Part bråk:

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

Räknande ger HL: $\frac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)} =$

$$\frac{1/3}{s-2} + \frac{1/6}{s-1} + \frac{-1/2}{s+1}$$

Prång! Kan hitta $\frac{1}{s-2}$, $\frac{1}{s-1}$, $\frac{1}{s+1}$ i TABELL!

$$\therefore\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{1}{6}}{s-1} - \frac{1/2}{s+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}}_{e^{2t}} + \frac{1}{6}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}}_{e^{t}} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}}_{e^{-t}}$$

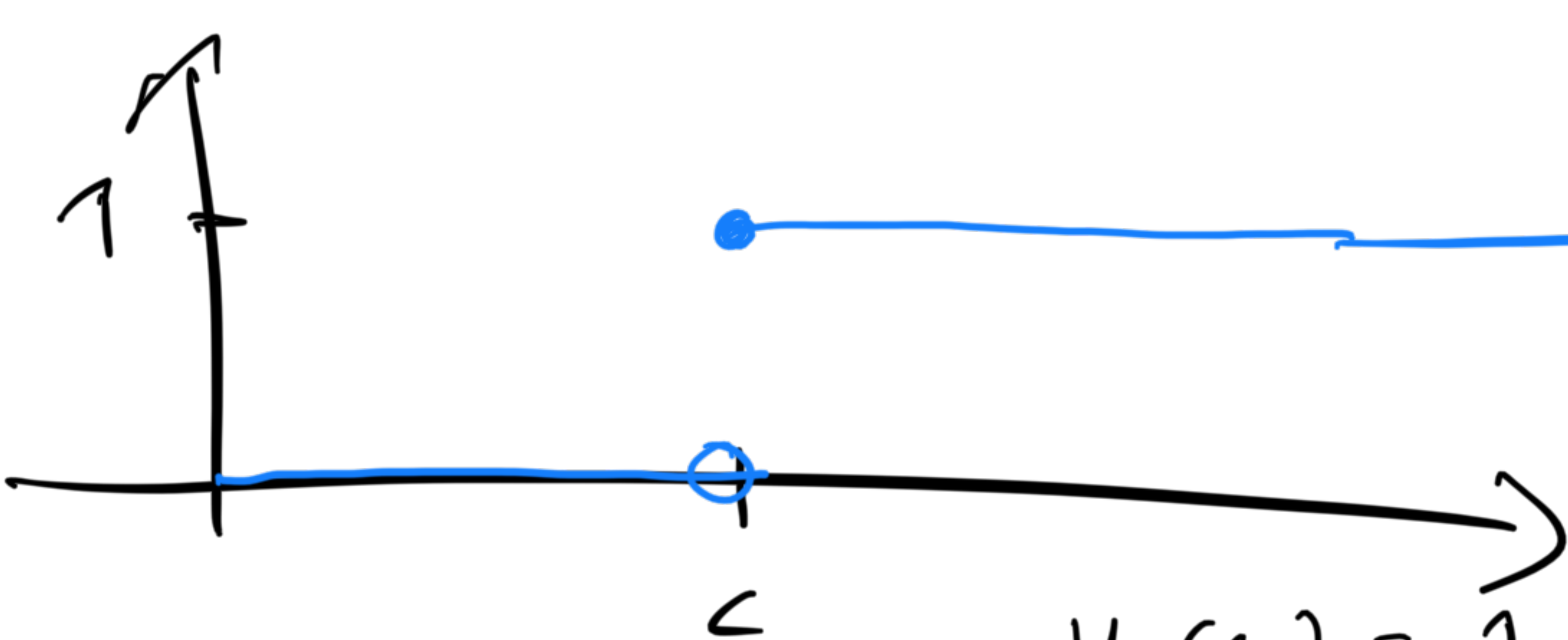
$= \ldots$ övning!

tabell!

Stegfunktionen (Kap 7.3)

(Obs: boken $\mathcal{U}(t-c)$)

Låt
$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le t < c \\ 1 & \text{om } t \ge c. \end{cases}$$



$u_c(c) = 1$

(Anm: värdet av u_c i punkten

c spelar oftast ingen roll.)

Kan använda $u_c(t)$ för att "slå på" och av funktioner

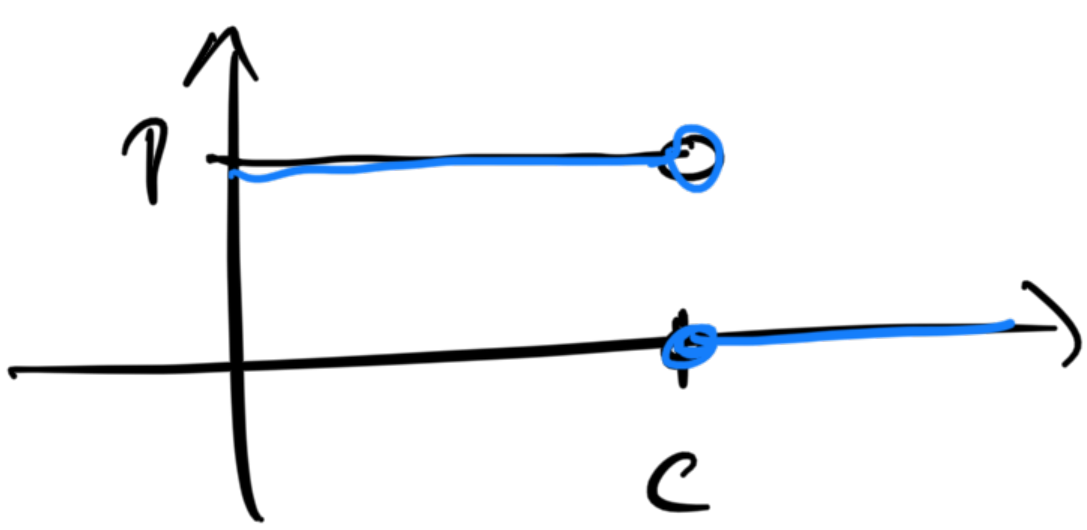
Ex: Skissa

a) $f(t) = 1 - u_c(t)$

b) $g(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

Lösn.:

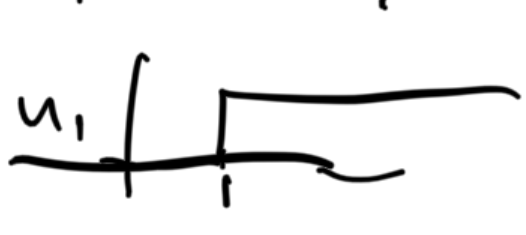
a) $f(t) = \begin{cases} 1 - 0 = 1 & 0 \leq t < c \\ 1 - 1 = 0 & t \geq c \end{cases}$

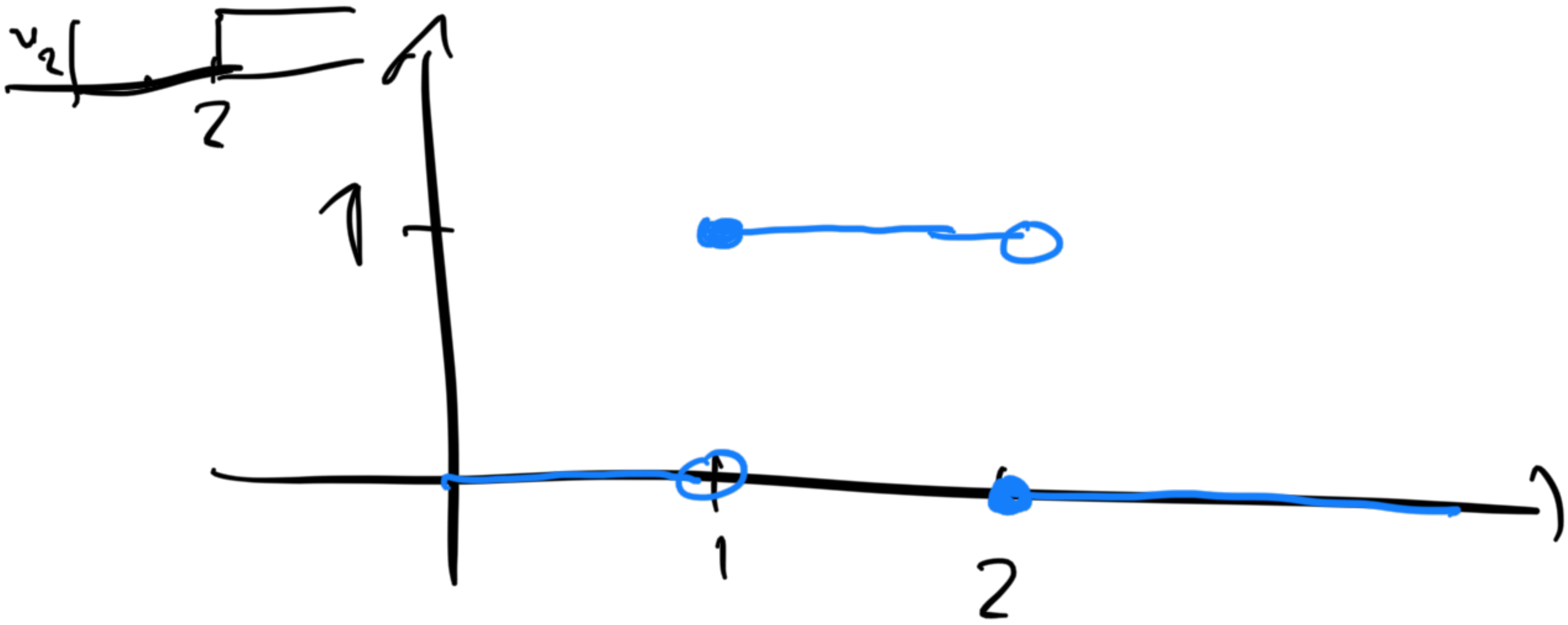


b) $g(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & t < 1 \\ 1 - 0 = 1 & 1 \leq t < 2 \\ 1 - 1 = 0 & t \geq 2 \end{cases}$

"

$u_1(t) - u_2(t)$





Påstå: $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \dfrac{e^{-cs}}{s}$ (om $s>0$)

Koll: $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty u_c(t)\cdot e^{-st}\,dt$

$$= \int_c^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt = \lim_{A\to\infty}\left[\int_c^A e^{-st}\,dt\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_c^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-e^{-sA}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s}\right)$$

$\to 0$ då $A\to\infty$

$$= \frac{e^{-sc}}{s}.$$ STÄMMER!

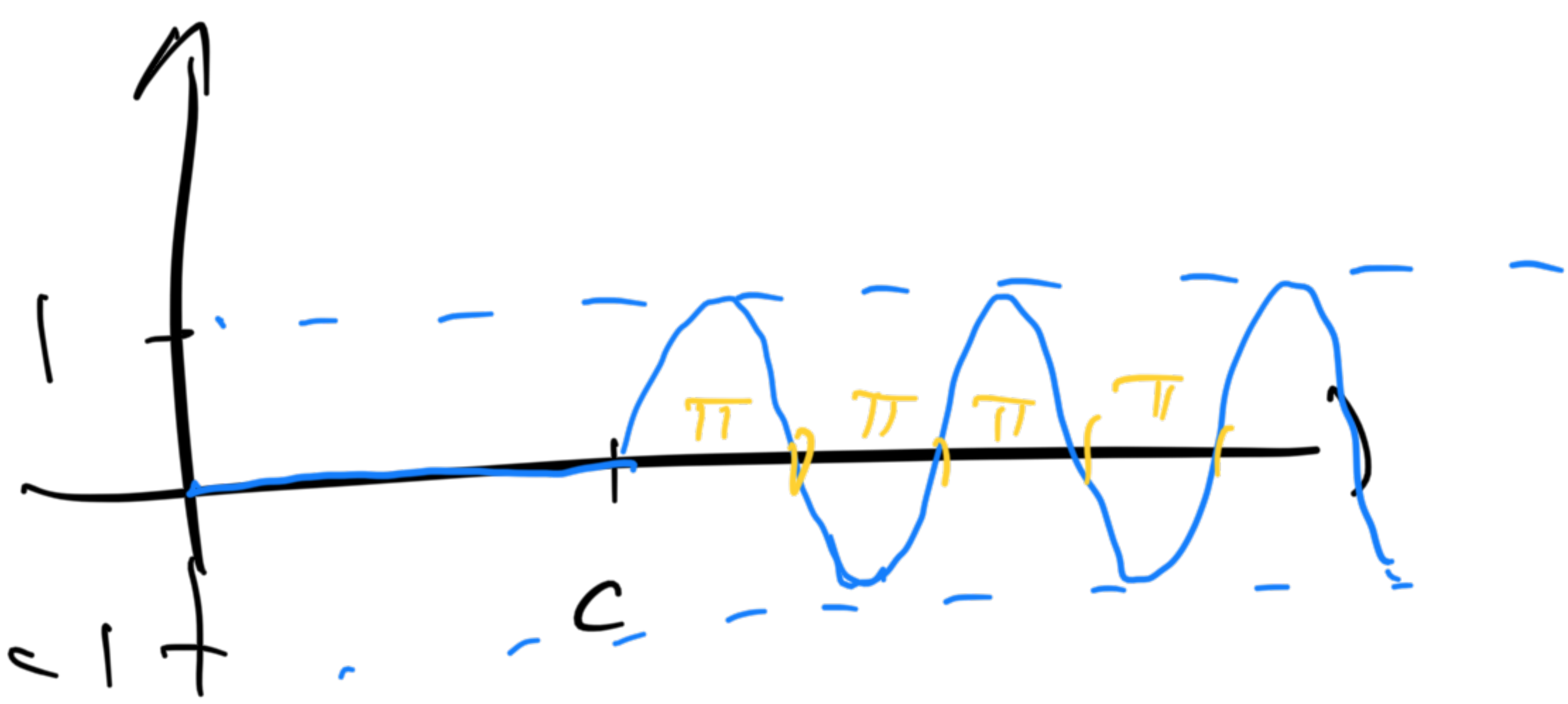
$(s>0)$.

Ex: Skissa $f(t) = u_c(t) \cdot \sin(t-c)$

(~~s~~säg $c \geq 0$)

Lösn:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < c \\ \sin(t-c) & t \geq c \end{cases}$$



Lampa på!

för $s > a$ (*)

Faktum: Om $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ och $c \geq 0$

så

(i) $\mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\}$

$$= e^{-cs} \cdot F(s) \qquad (s > a)$$

(ii) $\mathcal{L}\{e^{ct}\cdot f(t)\} = F(s-c)$

$(s > a+c)$ (*)

<u>Anm</u>: (i) används ofta "baklänges" (m.h.a. formelblad), t.ex.

vill hitta $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\cdot F(s)\} =$

$$= u_c(t)\cdot f(t-c).$$

<u>Anm</u>: (ii) används ofta som

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct} f(t)$$

<u>Anm</u>: (i) är "translation på t-sidan"

(ii) — " — på s-sidan"

Koll av (ii): $\mathcal{L}\{e^{ct}\cdot f(t)\} =$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\cdot(e^{ct} f(t))\,dt =$$

$$= \int_0 e^{-(s-c)\cdot t} f(t)\,dt$$

$$= F(s-c).$$

$(*) =$ finlir.

Ex: Bestäm inverstransform av

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}.$$

Lösning: ur tabell får vi: $s \mapsto s-1$

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1} = G(s)$$

Från (ii) får vi:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s-1)\}$$

$$= e^{1\cdot t}\cdot\cos(t) = e^{t}\cdot\cos(t).$$

Pröva: använd (i), (ii) för att enkelt utvidga Laplace-tabellen!

Stegfunktioner $\longleftrightarrow$ diff. ekv.

med "diskontinuerlig drivning".

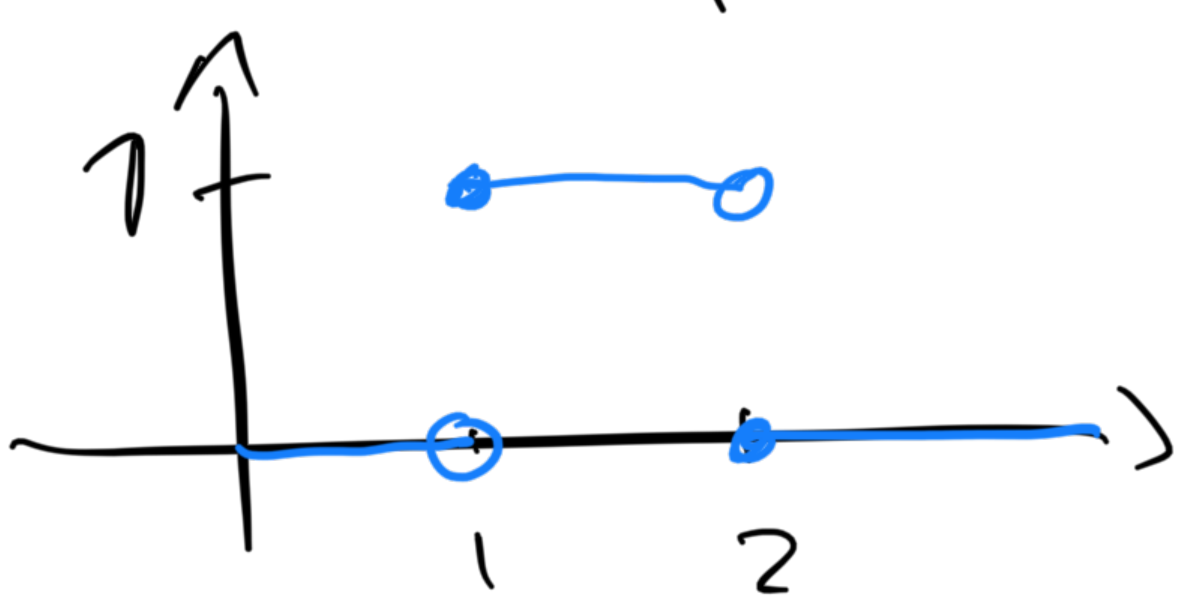
("tryck max på gas, släpp sen".)

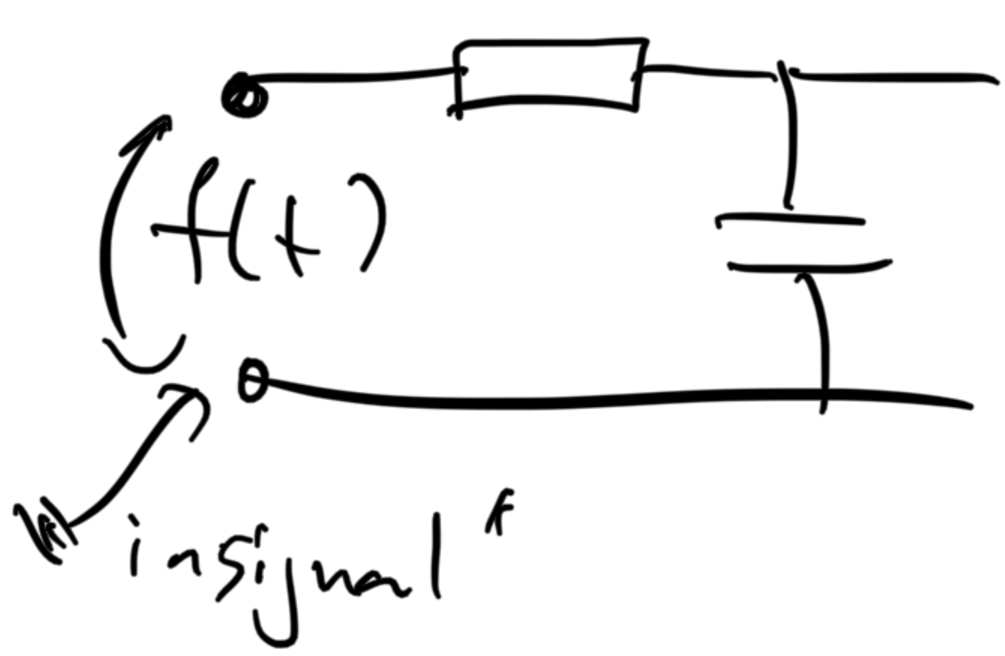
Ex: Lös BVP $y' + y = f(t)$,

$y(0) = 0$

$\uparrow$ BV

där $f(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$





$y(t)$: "utsignal"

$f(t) = u_1(t) - u_2(t)$

(Kommer: Skriv