SF1633, # 15 (Kap 12.4 + 12.5).

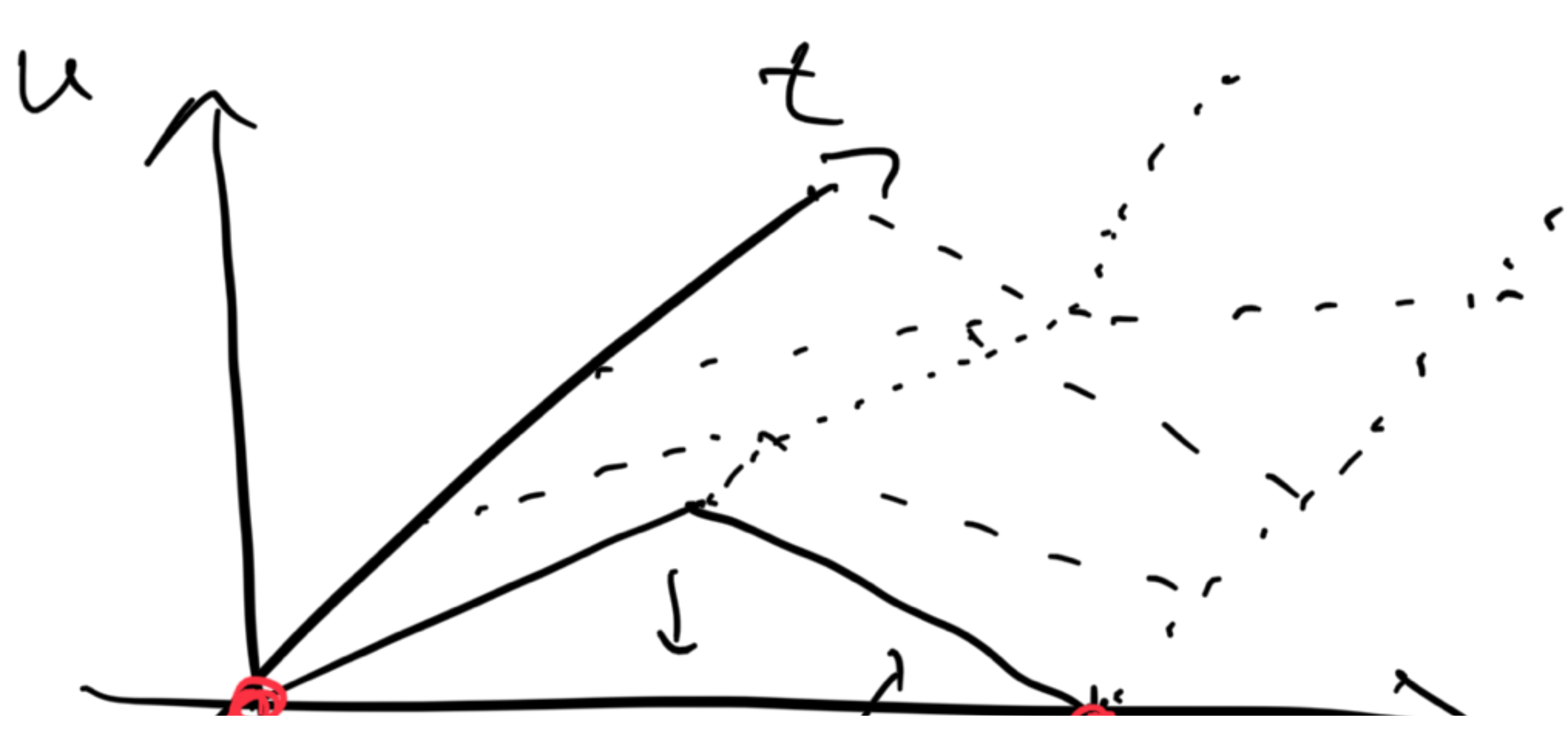
• Vågekvationen (Kap 12.4)

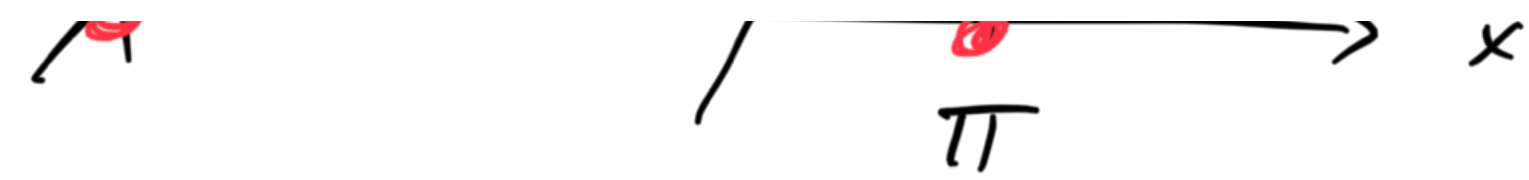
<u>Ex</u>: Sök $u(x,t)$ som uppfyller:

(E) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (våg ekv.).

(B) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0$

(I) $\left.\begin{aligned} &u(x,0) = f(x), \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{aligned}\right\} 0 < x < \pi$





string

$f(x)$: inital pos. för string

$g(x)$: "fart på strängen".

Fokusera först på att hitta lösning till (E) & (B)

Ansatz: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

Insättning i (E) ger (kolla!)

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

konstant!

$$\Longrightarrow \begin{cases} X'' + \lambda \cdot X = 0 \\ T'' + \lambda T = 0. \end{cases}$$

Eftersom vi vill att (B)

ska gälla (och vi är ~~inte~~ inte intresserade av triviala lösningen $u(x,t)=0 \ \forall x,t$) dvs undvik $\underline{T(t)=0} \ \forall t$,

så måste vi ha:

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Vi får randvärdesproblemet:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0)=X(\pi)=0.$$

Sågs förra gången: $\lambda < 0$ & $\lambda = 0 \Rightarrow$ trivial lösning

<u>OCH</u> icketriviala lösningar fås på formen

$$X(x) = c \cdot \sin(nx)$$

och $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$\therefore \lambda = n^2 \Rightarrow$ ekvationen

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0$$

har lösningen (allmänna)

$$T(t) = c_1 \cdot \cos(nt) + c_2 \cdot \sin(nt).$$

Således: funktionen

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos nt + B_n \sin nt\right) \cdot \sin(n \cdot x)$$

är lösning till (E) & (B)

för <u>varje</u> $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Vi noterar (Superposition!)

att även $u(x,t)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos nt + B_n \sin nt\right) \cdot \sin(n \cdot x)$$

för "<u>varje</u>" val av $\{A_n\}, \{B_n\}$

ger lösning till (E) & (B). (Petigt: konvergens?)

Fokusera nu på (I)

(dvs. hur skall vi välja A_n & B_n ?).

Notera först:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \cancel{\sum}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\cdot A_n \sin(n\cdot t) + n\cdot B_n\cdot \cos(nt)\right)\overbrace{}^{\sin(n\cdot x)}$$

Begynnelsevillkor (I) ger då:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot \underline{\sin(nx)}$$

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot B_n\cdot \underline{\sin(n\cdot x)}$$

Utveckling av f & g i

<u>sinus</u>serier $\Rightarrow$ vi bör välja

A_n, B_n så att:

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\,dx \\ n\cdot B_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\sin(n\cdot x)\,dx \end{cases}$$

$(n \geq 1.)$

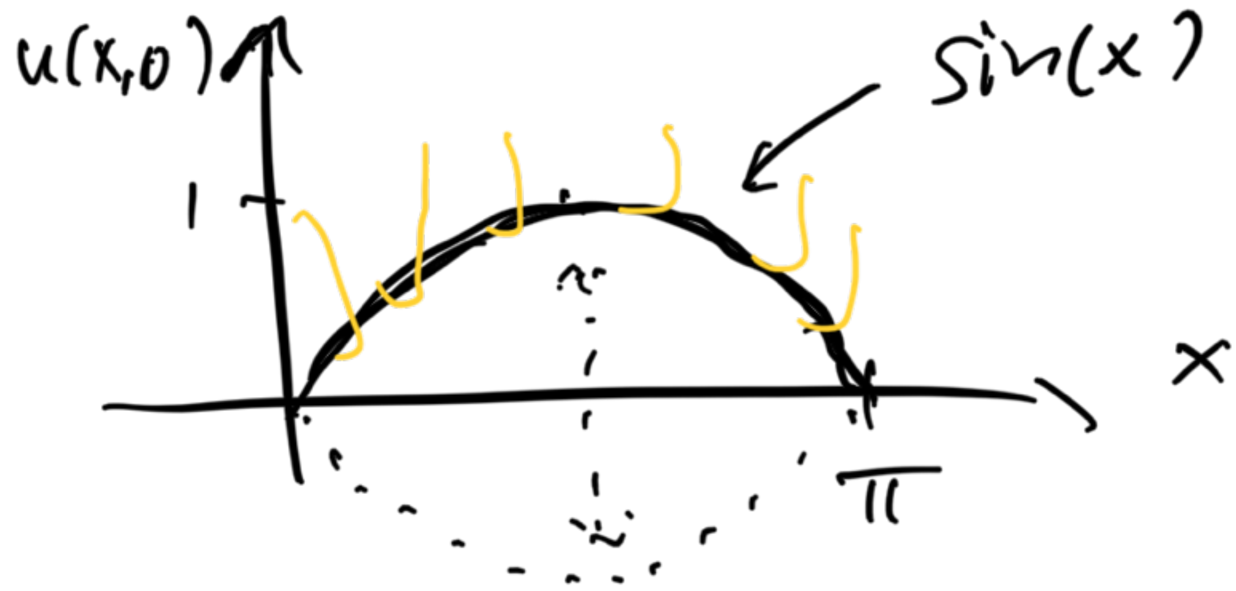
<u>Ex</u>: (vibrerande sträng):

$$u(x,t) = \cos(t)\cdot\sin(x)$$

$$u(x,0) = \cos(0)\cdot\sin(x) = \sin(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin(t)\cdot\sin(x) = 0$$

"strängen har ingen fart vid $t=0$"

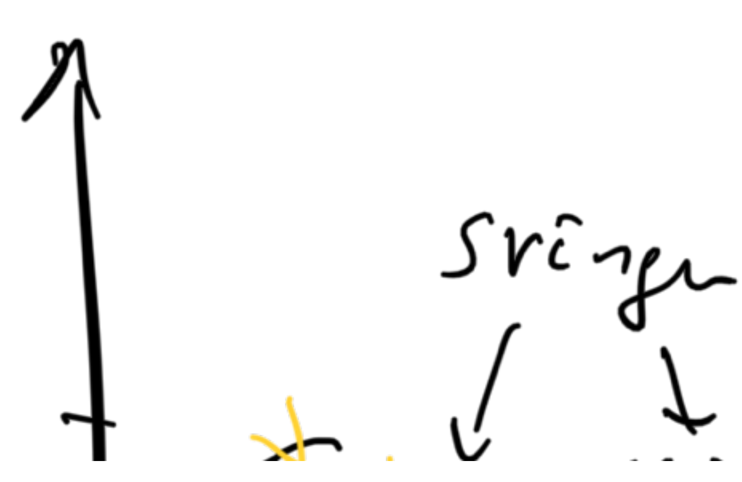


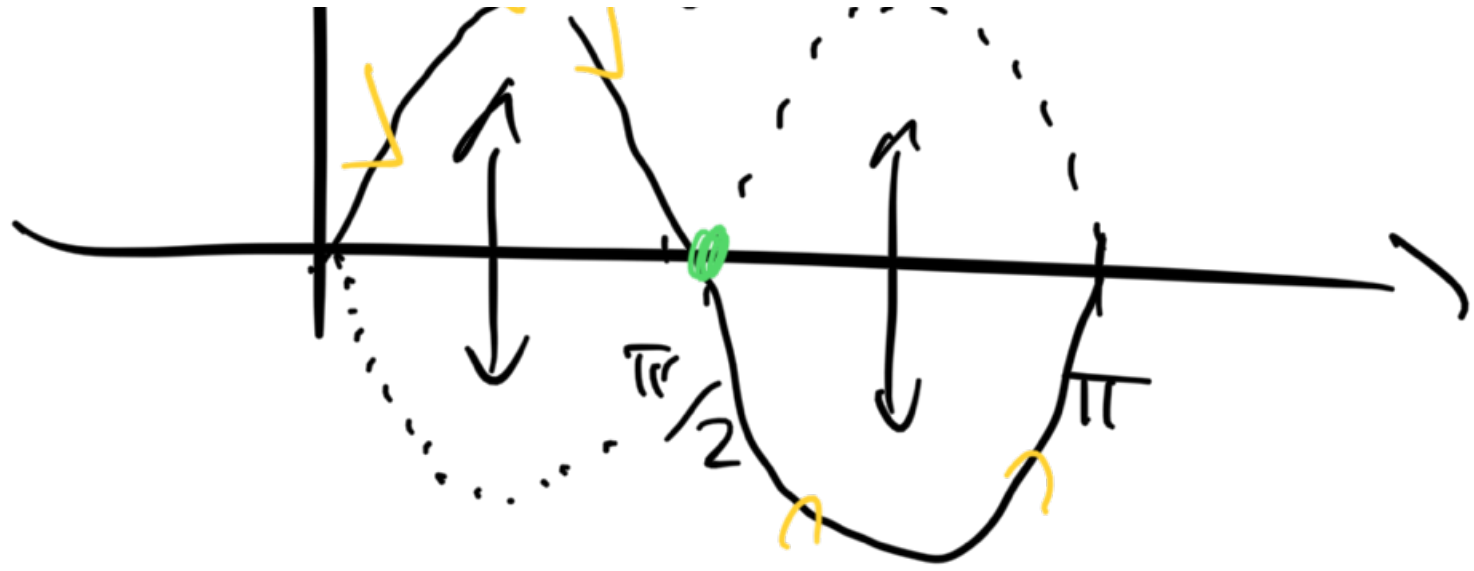
("i sitt maxläge").

Ö: Kolla att (E), (B) & (I) gäller!

<u>n=2</u>: $u(x,t) = u_2(x,t) = \cos(2t)\cdot\sin(2x)$
$(n=2)$

"svänger dubbelt så snabbt!"



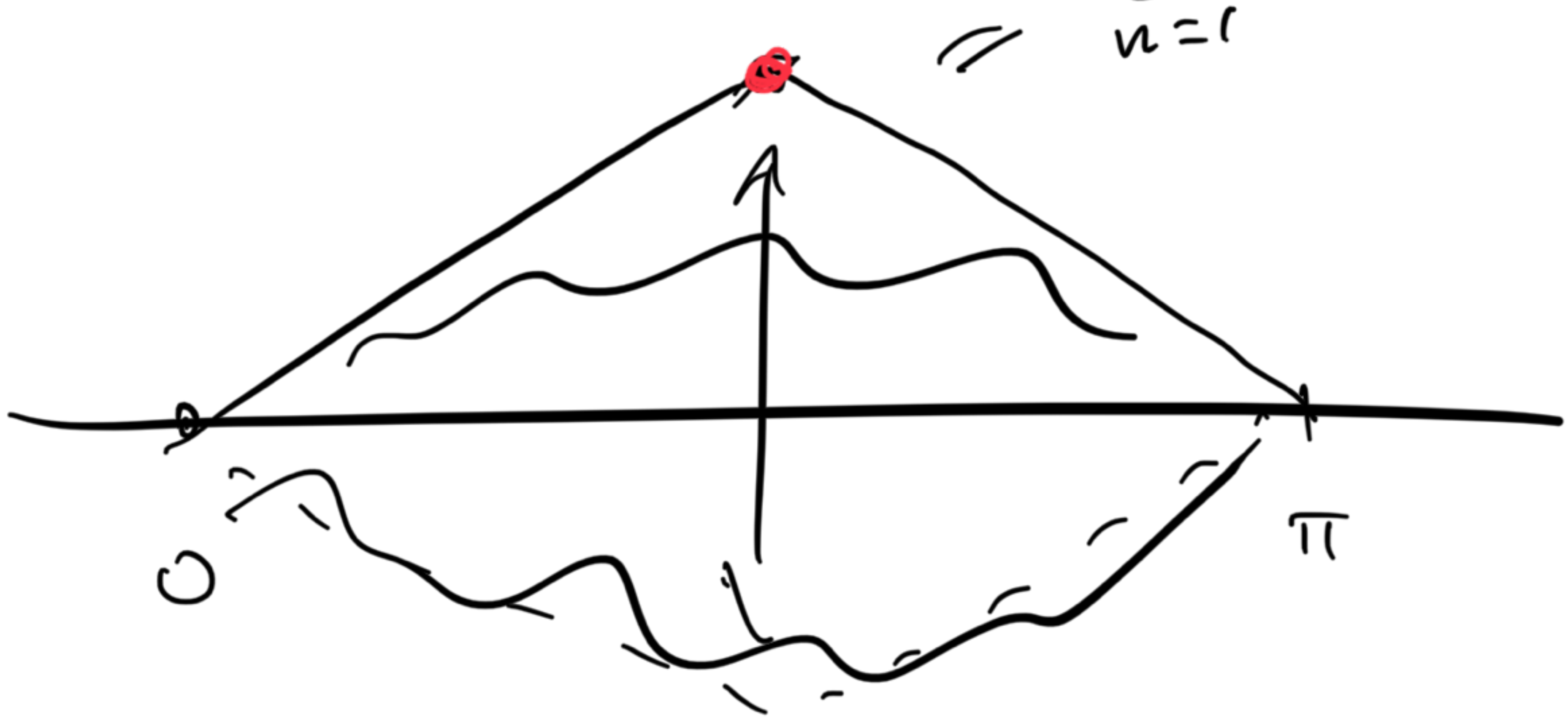


$n = 3, 4, \ldots$ etc : "övertoner"

vibrationen byggs upp av dessa svängningen.

superposition!

!? $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(nx)$



LINJÄR

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

homogent

[Jfr: $A\bar{x} = \bar{0}$

Om $\bar{x}_1$ & $\bar{x}_2$ är lösningar:

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ är lösning

Koll: ~~Ax~~ VL: $A\bar{x} = A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) =$

$$= \underbrace{A\bar{x}_1}_{=\bar{0}} + \underbrace{A\bar{x}_2}_{=\bar{0}} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

HL: $\bar{0}$ $\therefore$ $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ är lösning!!]

LINJÄR!!

(E) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$

Antag: u_1 & u_2 lösningar

påst: $u = u_1 + u_2$ också lösning!

Koll:

VL: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 + u_2)$$

$$= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

HL : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t}(u_1 + u_2)$

$= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$

$\therefore$ VL = HL ! ($\alpha \cdot u_1$)

Kollar rand: $u_1(0,t) = 0 = u_2(0,t)$

$\Longrightarrow u(0,t) = u_1(0,t) + u_2(0,t)$

$= 0 + 0 = 0$

PSS $u(\pi, t)$ . . . .

Laplaces elevation (12.5)

(E) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$

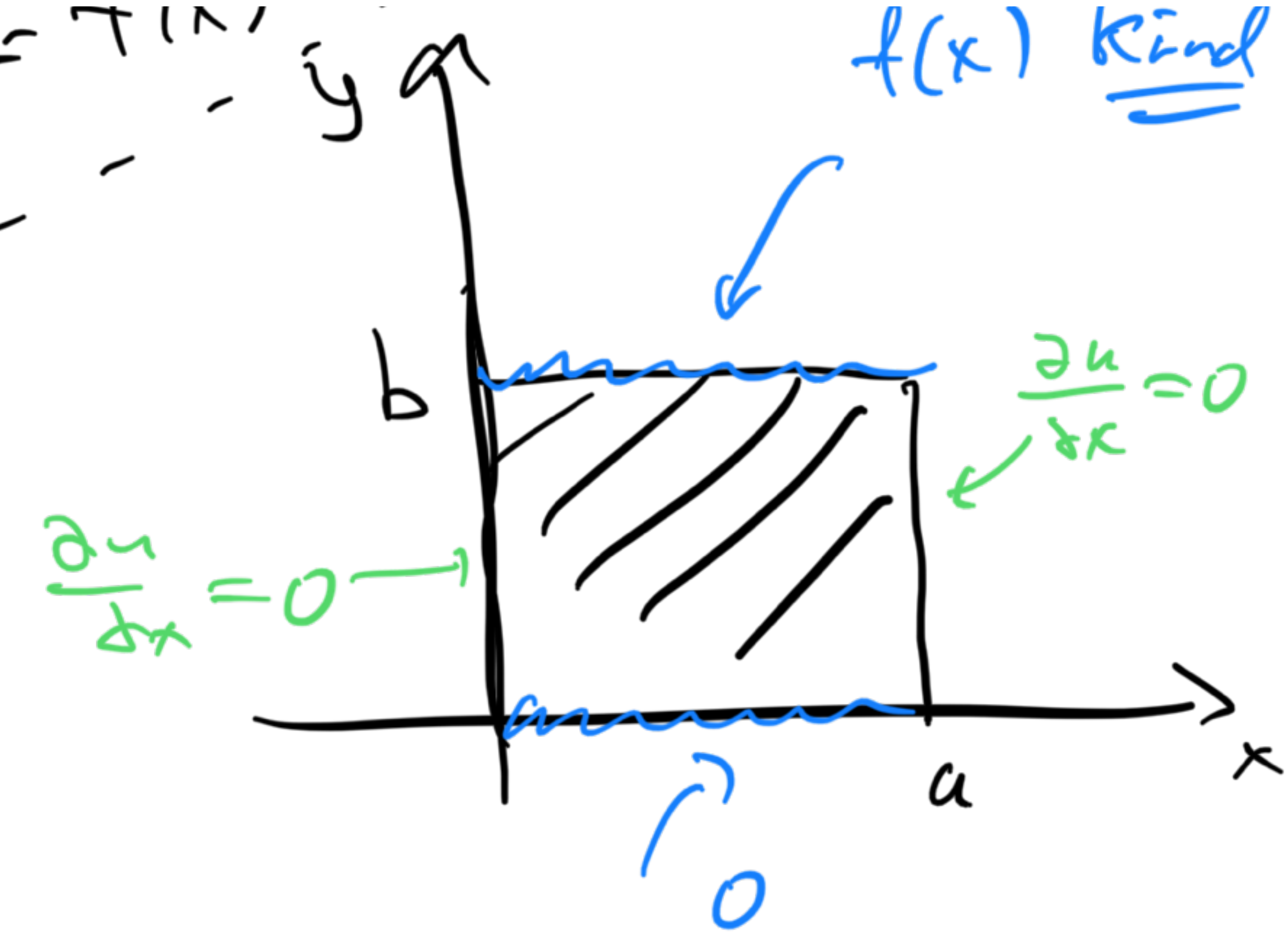
(B) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0$

for $0 < y < b$

(I)$_a$ $u(x,0) = 0$ } $0 < x < a$

$f(x)$ - - - - -

b) $u(x,b) = f(x)$



Tolkning: temperatur i plåt; isolerad på vänster & höger kant, "isbad" under, och "blåslampa" $f(x)$ upptill.

Förenkling: tag $a = \pi$.

Börja med: ansats $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Insättning i (E) ger:

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = -\lambda \quad \text{(konstant)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X'' + \lambda \cdot X = 0 \\ Y'' - \lambda \cdot Y = 0 \end{cases}$$

Villkor (B) ger:

$$X'(0)Y(y)=0 \qquad 0<y<\pi$$

$$X'(\pi)Y(y)=0$$

För icke-trivial lösning:

$$X'(0)=X'(\pi)=0.$$

Villkoret $u(x,0)=0$, ger

$$X(x)Y(0)=0 \qquad \forall x$$

$$\Rightarrow Y(0)=0.$$

Poäng: vi får randvärdesproblemet:

1) $X''+\lambda X=0$, $X'(0)=X'(\pi)=0$

2) $Y''-\lambda Y=0$, $Y(0)=0$.

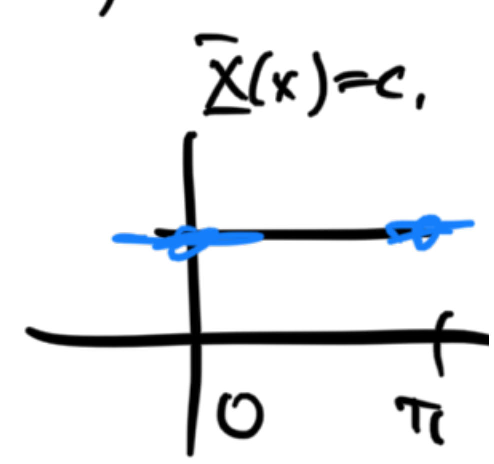
Börja med y:

- Fall $\lambda<0$: Bara $X(x)=0$ $\forall x$ dvs triv. lösning.

- Fall $\lambda=0$: $X''=0 \Rightarrow$

$$X(x)=c_1+c_2x \;;$$

$$0=X'(0) \Rightarrow c_2=0$$



Men: $\underline{X}(x) = c_1$ funkar!

(för all c_1).

- Fall $\lambda > 0$, skriv $\lambda = w^2$, $w > 0$.

Allmän lösning:

$$\underline{X}(x) = c_1 \cdot \cos(wx) + c_2 \sin(wx)$$

$$\left(\Rightarrow \underline{X}'(x) = -c_1 w \sin(wx) + c_2 w \cos(wx) \right)$$

Randvillkor ger:

$$0 = \underline{X}'(0) = c_2 \cdot w \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{X}'(x) = -c_1 w \cdot \sin(wx).$$

$$\therefore 0 = \underline{X}'(\pi) = -c_1 w \sin(w\pi);$$

icke triv. lösning om $c_1 \neq 0$, och då måste vi ha:

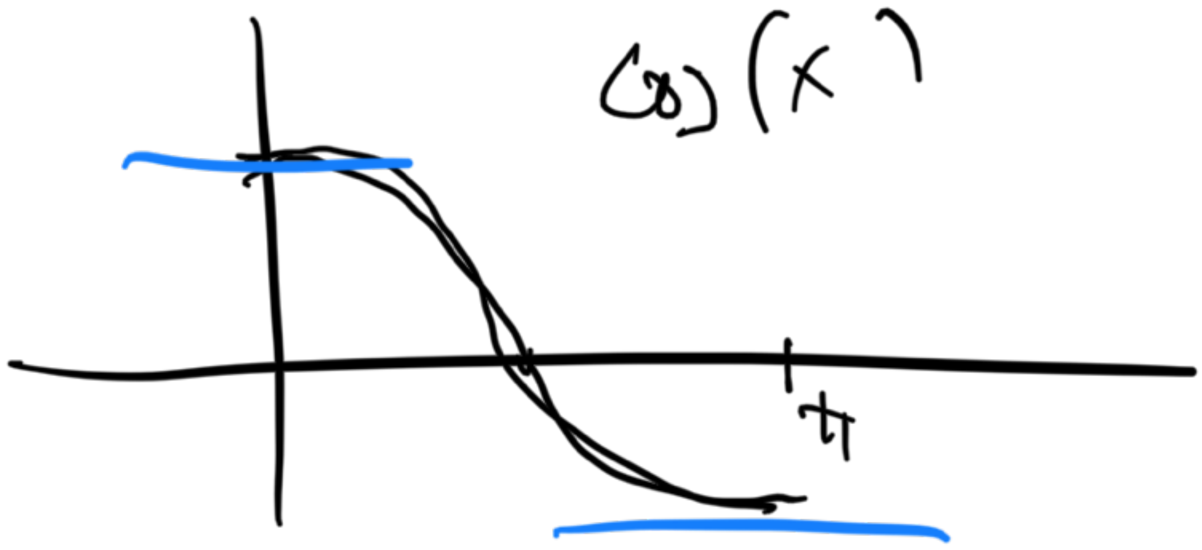
$$-\sin(w\pi) = 0 \Rightarrow \underline{w = n},$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

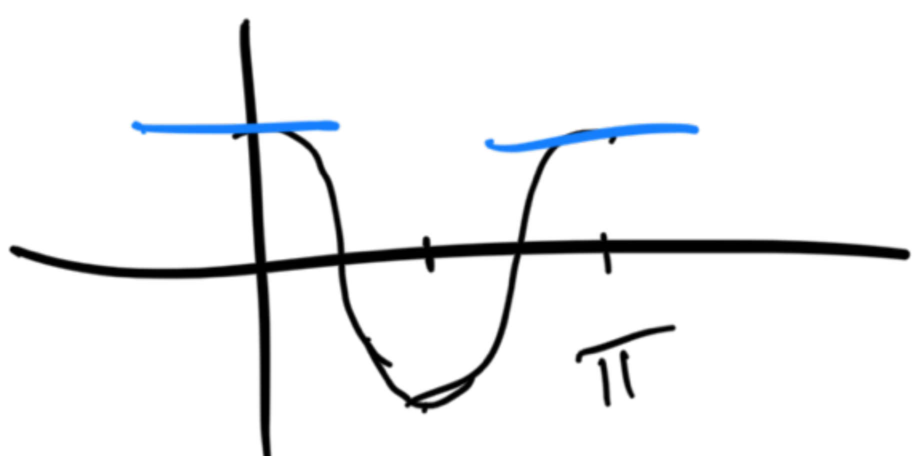
$\therefore$ får lösning då $w = n$, $n = 1, \ldots$

~~på formen c_2~~

på formen $X_n = c_n \cdot \cos(nx)$



cos(nx) har derivata noll i 0 & π.
(n=1)



cos(2x)

(n=2)

Ekv 2 (för $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$)

har allmän lösning: $\left[2) \; Y'' - \lambda Y = 0 \right]$

$$Y(y) = c_1 \cdot e^{ny} + c_2 \cdot e^{-n \cdot y}$$

$\lambda = w^2 = n^2$

$r^2 - n^2 = 0$
$\Rightarrow r = \pm n$

Randvillkor $Y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

dvs $c_2 = -c_1$

$$\therefore \; Y(y) = c_1 \left(e^{ny} - e^{-ny}\right)$$

$\therefore\ Y(y) = c_1(e^{ny} - e^{-ny})$

(anm: $\lambda = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 + c_2 y$
och $Y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$)

$$\therefore\ u_n(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$
$$= D_n \cos(nx)(e^{ny} - e^{-ny}).$$

Sant ($n=0$) $u_0(x,y) = D_0 \cdot y$,
är lösningen till (E),(B), I(a)
för alla $n \geq 1$.

Superposition ger (obs:
(E) linjär & (B) homogen,
och (I)a också homogen).

att
$$u(x,y) = D_0 \cdot y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(nx)(e^{ny} - e^{-ny})$$

är lösning.

återstår: hitta D_0, D_n så att
även (I)b uppfyllt, dvs

$u(x,b) = f(x)$. Dvs

$$u(x,b) = D_0 \cdot b + \sum_{n\geq 1} D_n \cos(nx) \underbrace{(e^{nb} - e^{-nb})}$$

(~~t~~ $y=b$)

definiera $B_n = e^{n \cdot b} - e^{-nb}$

(obs: B_n känd)

$$\therefore u(x,b) = D_0 b + \sum D_n \cdot \cos(nx) \cdot B_n$$

= (om vi låter $A_n = B_n \cdot D_n$)

$$= D_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(nx)$$

$$= f(x).$$

Utveckla f i cosinus serie!

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

eftersom f(x) given

(där $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$

KÄND, även a_0 känd)

∴ Om vi väljer A_n så att

$$A_0 b = \frac{a_0}{2} \quad \left(\Leftrightarrow \; A_0 = \frac{a_0}{2b} \right)$$

och $A_n = D_n \cdot B_n = a_n$, dvs

$$D_n = \frac{a_n}{B_n} = \frac{a_n}{e^{nb} - e^{-nb}}, \; n \geq 1$$

Så är $u(x,y)$ en lösning

till randvärdesproblemet