SF1633, #14

Separation av variabler (PDE),
kap 12.1

TJAT: anmäl er till tentan, deadline nästa tisdag (24 sep.)

OBS: salstenta

Ex: Betrakta den partiella differential-ekvationen

$$(1) \quad y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(där $u = u(x,y)$ är okänd.).

En metod för att hitta lösningar är <u>separation av variabler</u>.

<u>Ansats</u>: $u(x,y)$ är på formen

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y).$$

(Anm/varning: funkar inte alltid.)

(1) + ansats ger:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)\cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x)\cdot Y'(y)$$

$$\Longrightarrow\ y\cdot X'(x)Y(y) + x\cdot X(x)\cdot Y'(y) = 0.$$

$$\Longrightarrow\ y X'\cdot Y = -x\cdot X\cdot Y'$$

$\Longrightarrow$ (försiktigt!)

$$\frac{X'(x)}{x\cdot X(x)} = \frac{-Y'(y)}{y\cdot Y(y)}.$$

VL: beror ej på y!

HL: beror ej på x!

$\therefore$ Kan studera

enklare sedan!

$$\begin{cases} \dfrac{X'(x)}{x \cdot X(x)} = -\lambda \\[2ex] \dfrac{-Y'(y)}{y \cdot Y(y)} = -\lambda \end{cases}$$

Konstant!

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} X'(x) + \lambda x \cdot X(x) = 0 \\ Y'(y) - \lambda y Y(y) = 0 . \end{cases}$$

Linjära! (Dessutom sep. ODE-er)

$$\text{IF}: \quad e^{\int \lambda x \, dx} = e^{\frac{\lambda x^2}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(X(x) \cdot e^{\frac{\lambda x^2}{2}} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad X(x) \cdot e^{\lambda x^2/2} = C_1$$

$$\Longrightarrow \quad X(x) = C_1 \cdot e^{-\lambda x^2/2}.$$

$$\frac{\lambda y^2}{2}$$

P.S.S. ser vi att $Y(y) = C_2 \cdot e^{\lambda y^2/2}$.

$\therefore$ $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) =$

$$= \underbrace{C_1 \cdot C_2}_{=A} e^{-\lambda x^2/2} \cdot e^{\lambda y^2/2}$$

$\leftarrow$ ny konstant!

$$= A \cdot e^{k(y^2-x^2)}$$

där $k = \frac{\lambda}{2}$ och A är konstanter.

Koll: $\frac{\partial u}{\partial x} = A \cdot (-2kx) \cdot e^{k(y^2-x^2)}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A(2ky) \cdot e^{k(y^2-x^2)}$$

$$\therefore \quad y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= y(-2Akx) \cdot e^{k(y^2-x^2)} + x(2Aky) \cdot e^{k(y^2-x^2)}$$

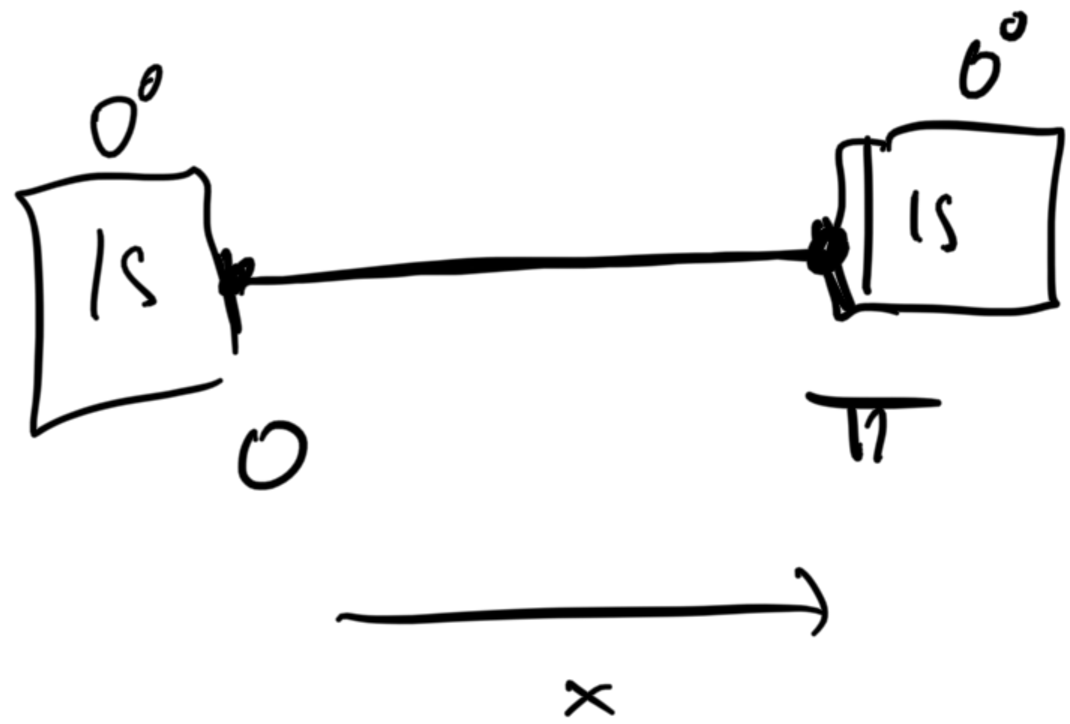
$$= (\underbrace{-2Akxy + 2Akxy}_{=0}) \cdot e^{k(y^2-x^2)}$$

$$= 0 \qquad \forall x, y.$$

$\therefore$ Har hittat lösning till (1).

Värmeledningsekvationen (12.3)

Vill hitta lösning $u(x,t)$ till randvärdesproblemet



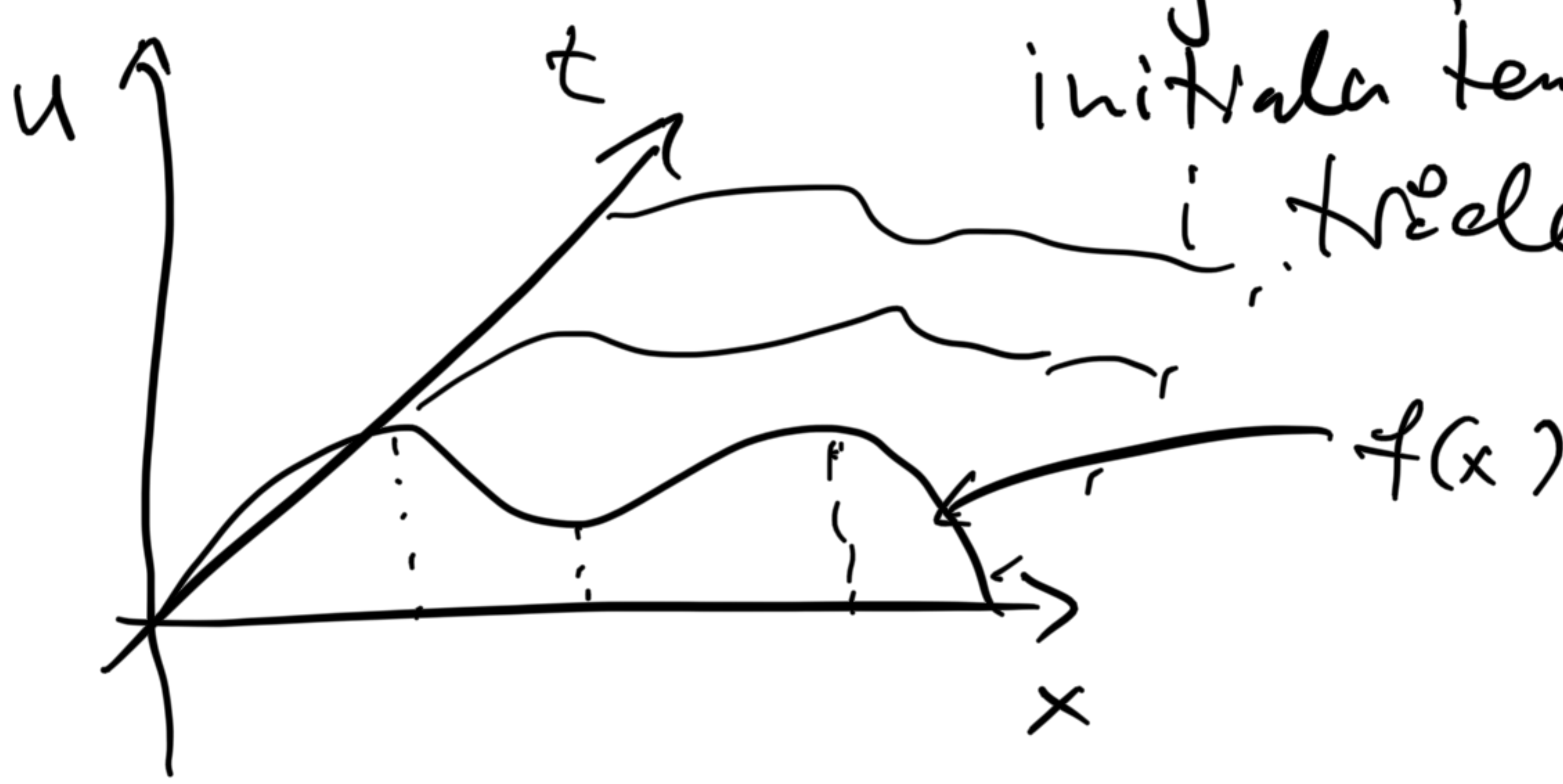
(E) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ (värmeledningsekvation)

börja här!

(B) $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$, $t>0$.

(I) $u(x,0) = f(x)$

given, är vår initiala temperatur i tråden.



Intuition: $t \to \infty$, vad händer?

Borde ha: $u(x,t) \to 0$
$\forall x \in [0,\pi]$.

Plan: börja med att hitta lösning till (E), (B)

Anm.: $u(x,t) = 0 \quad \forall x,t$
är en lösning till (E) & (B).

Som tidigare: ansätt
$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$
Får då: $\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)\,T(t)$,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

och: $\frac{\partial u}{\partial t} = X(x) \cdot T'(t)$

Insättning i (E) ger:

$$X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T'(t)$$
som skrivs om:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

<u>konstant</u>

VL: inget t.
HL: inget x.

Detta ger <u>två</u> "oberoende" ekvationer:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$T(t) = C_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Vill även att (B) är uppfyllt, dvs

$$0 = u(0,t) = X(0) \cdot T(t) \quad \forall t.$$

$$0 = u(\pi,t) = X(\pi) \cdot T(t)$$

Antingen är $T(t) = 0 \ \forall t$ (dvs $C_0 = 0$), och vi får $u(x,t) = 0 \ \forall x, t$, dvs trivial lösning.

Eller $C_0 \neq 0 \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$

∴ Finn <u>icke triviala</u> lösningar till randvärdes-problemet

$$(*) \quad X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X(0)=X(\pi)=0.$$

Fall 1: $\lambda < 0 \Rightarrow \dots$?

(Ledtråd: bara triv. lösning!)

(övning under rasten)

<u>Fall 2</u>: $\lambda = 0 \Rightarrow X''(x)=0$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x.$$

$X(0)=0 \Rightarrow c_1 = 0$

som med $X(\pi) = 0 + c_2 \cdot \pi = 0$
$\Rightarrow c_2 = 0$

∴ $\lambda=0$ ger <u>trivial</u> lösning!

<u>Fall 3</u>: $\lambda > 0$. Skriv $\lambda = w^2$

$(w > 0)$.

För då:

$$X'' + w^2 X = 0$$

[dvs: $r^2 + w^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i \cdot w$]

$\Rightarrow$ den allmänna lösningen

är $c_1 \cdot \cos(wx) + c_2 \cdot \sin(wx)$

Randvärden:

$0 = X(0) = c_1 \cdot \cos(0) = c_1$

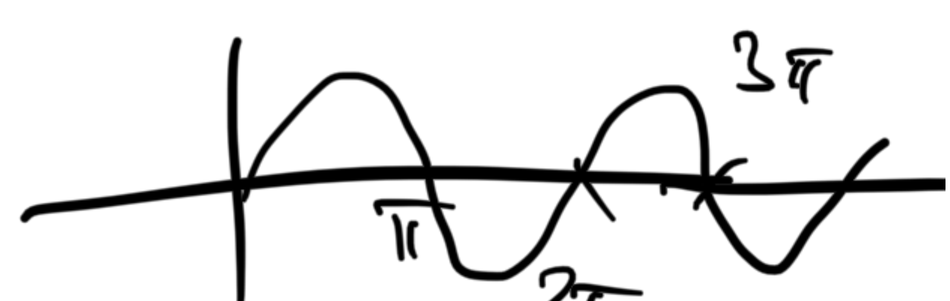
dvs $c_1 = 0$.

$0 = X(\pi) = c_2 \sin(w\pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \quad \forall x, \text{ igen triv. lösning.} \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin(w\pi) = 0$, $w > 0$

$\Rightarrow w = 1, 2, 3, \ldots$



Sammanfattning:

(där $w = n$).

Om $\lambda = n$

$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Så är

$$u(x,t) = X(x) \cdot \underbrace{T(t)}_{c \cdot e^{-\lambda t}} =$$

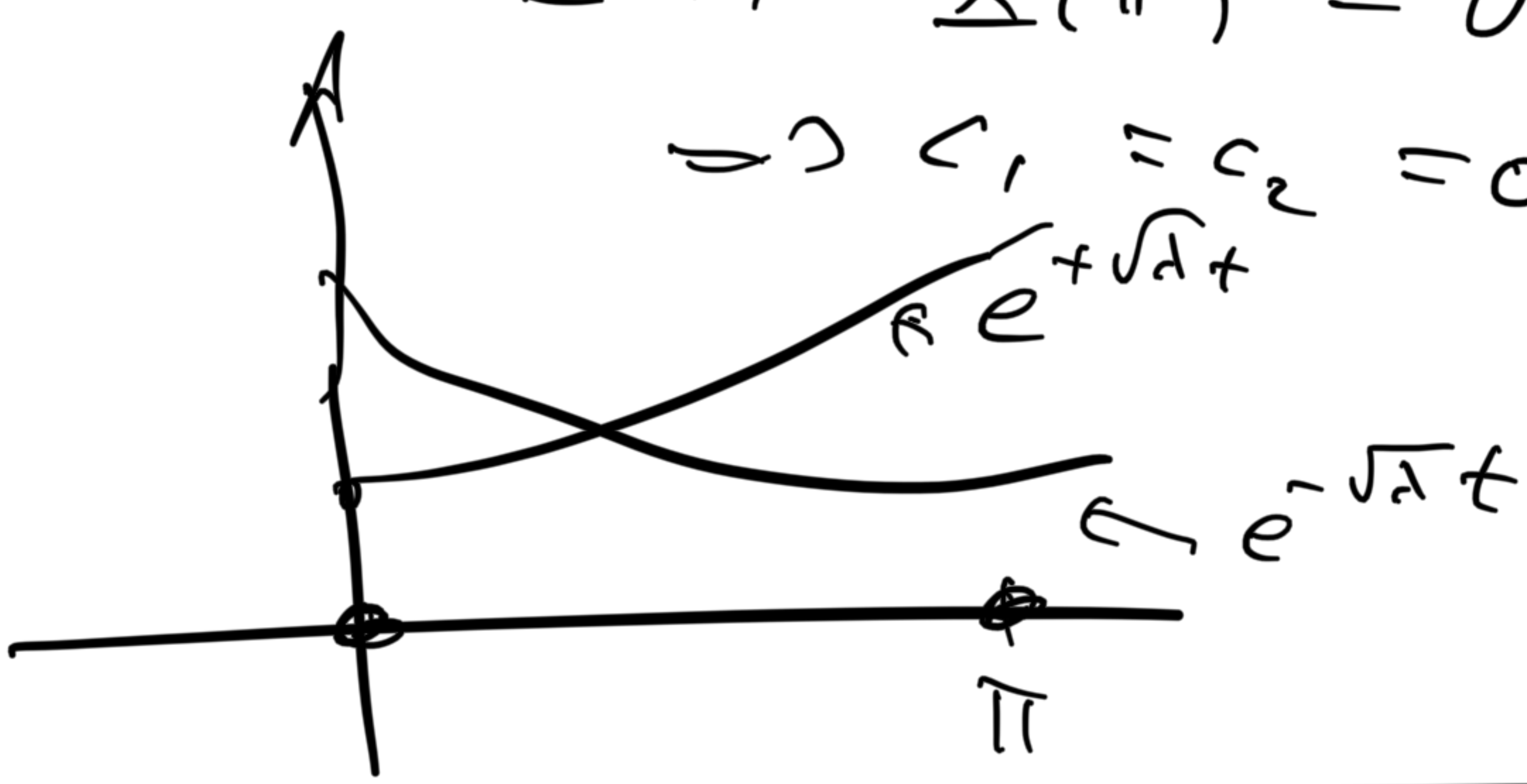
$$= B_n \sin(nx) \cdot e^{-n^2 t} \quad (\lambda = n^2)$$

ger icke trivial lösning till (E) & (B).

$\lambda < 0 \implies X(t) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} t}$

$X(0) = X(\pi) = 0$

$\implies c_1 = c_2 = 0$



Koll: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -n^2 \cdot B_n \cdot \sin(nx) \cdot e^{-n^2 t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_n \sin(nx)(-n^2) e^{-n^2 t}$$

$\therefore$ VL = HL, dvs har hitta lösning! (Dvs varje $n = 1, 2, \ldots$ ger en lösning på ovanstående form, dvs $u(x,t) =$

$$B_n \cdot \sin(nx) \cdot e^{-n^2 t}.$$

B_n konstant, fritt vald.

Superposition: notera att om u_1 & u_2 är lösningar till (E), så är även $u = u_1 + u_2$ en lösning!

Koll:

VL: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$

= om u_1 lösn $\qquad$ = om u_2 lösning

HL: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\partial t}$

$\therefore$ VL = HL; alltså vår ursprungliga lösning!

Dessutom: om u_1 & u_2 uppfyller (B) så gör även $u = u_1 + u_2$ det

(Koll: $u(0) = u_1(0) + u_2(0)$

$= 0 + 0 = 0$.

P.S.S. Kolla att $u(\pi) = 0$).

Poäng: ser att även

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

ger lösning till (E) & (B)

för varje heltal N,

och varje val av konstanter

$B_1, B_2, \ldots, B_N$.

Om vi låter $N \to \infty$ borde

vi även få lösning om

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \cdot e^{-n^2 t}$$

(konvergens!?)

Plan: fiffigt val av B_n ser till att (I) också uppfyllt. (I): $u(x,0) = f(x)$ given

Dvs: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$ $t=0$!

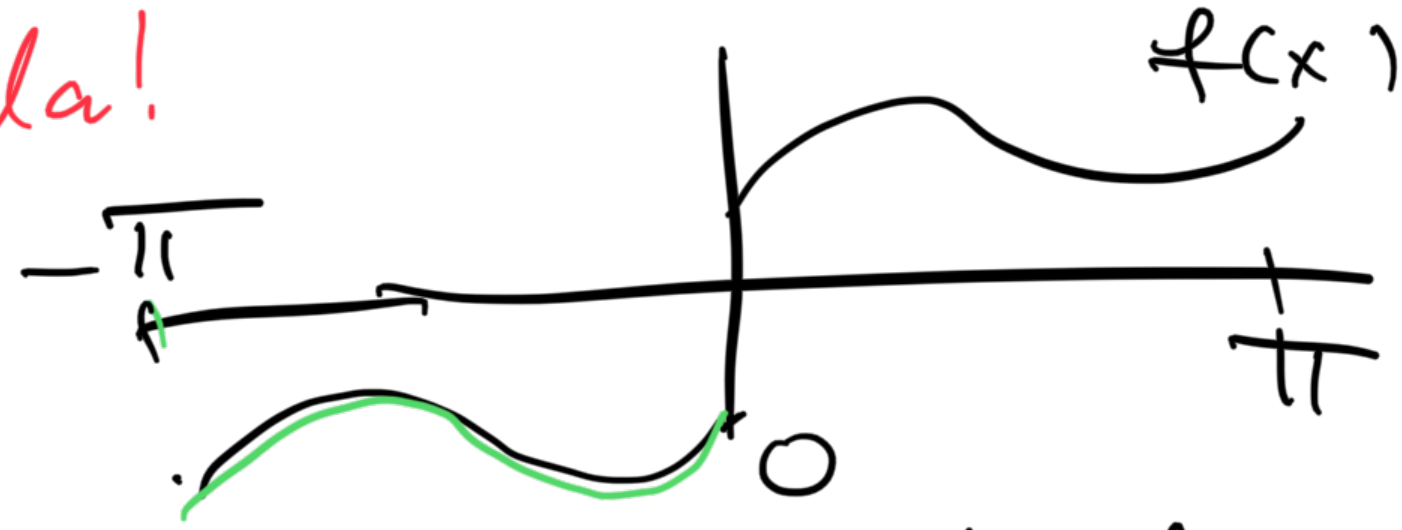
och $u(x,0) = f(x) \Longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = f(x).$$

~~Hu~~ Hur hitta B_n ?? sinus

Så! Utveckla f i ~~fourier~~-serie!

okända!



udda utvidgning

till $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

då $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx$

kända!

Välj nu $B_n = b_n$! $(\forall n)$

Slutsats: $u(x,t) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \cdot e^{-n^2 t}$$

där $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

känd

är lösning till (E), (B), (I).

<u>Koll:</u> $u(x,t) \to ?$ då $t \to \infty$?

$e^{-n^2 t} \to 0$ $\forall n$, dvs

$u(x,t) \to 0 \quad (\forall x)$ di $t \to \infty$.