SF1633, # 13

(Fourier serier, forts.)

Första gången:

$f(x)$: 2π-periodisk funktion,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ -1 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

OBS: HL automatiskt periodisk

Sög: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

?

$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n \sin nx$ (bara sin!)

$$= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right)$$

$f \cdot \sin$ jämn

(dvs: $b_n \overset{\text{def!}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

OBS: inre produkt

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\;\frac{1-(-1)^n}{n}$$

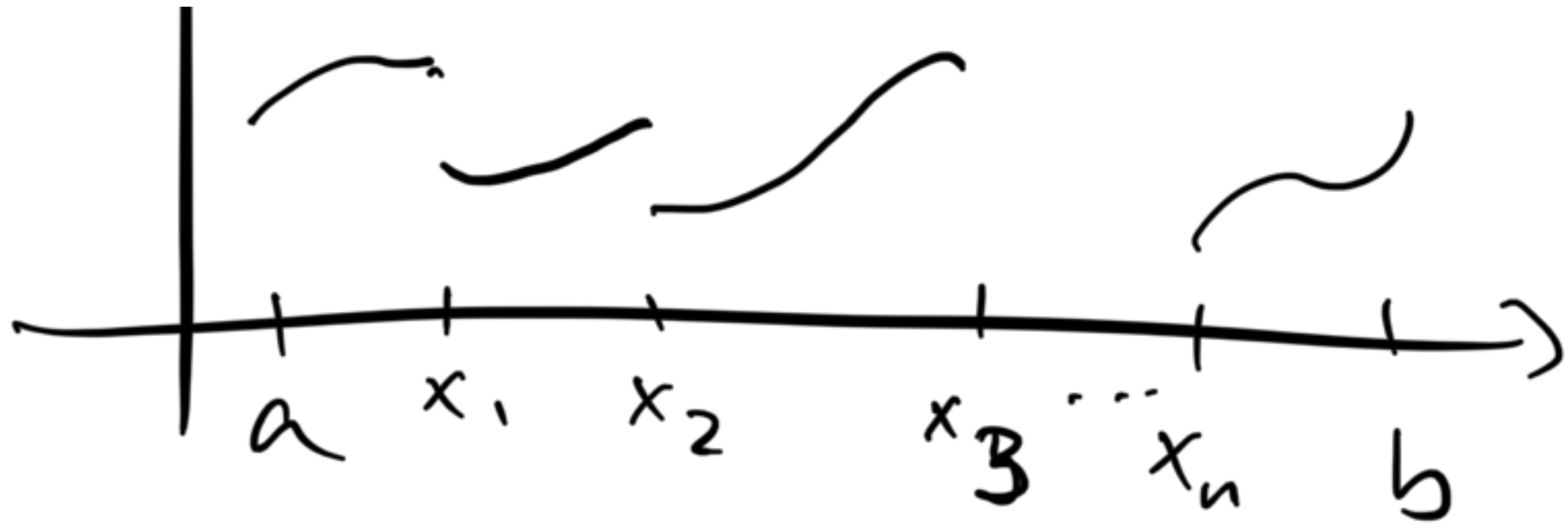
Vad betyder "$\sim$":

Summan konvergerar (ofta) mot $f(x)$, men kan finnas några undantag...

"Det": f är <u>styckvist kontinuerlig</u> på $[a,b]$

om: <u>bild</u>

$\uparrow$ ...



Dvs: vi tillåter f att "hoppa" ~~ändligt~~ ändligt många ggr, men kontinuerlig annars.

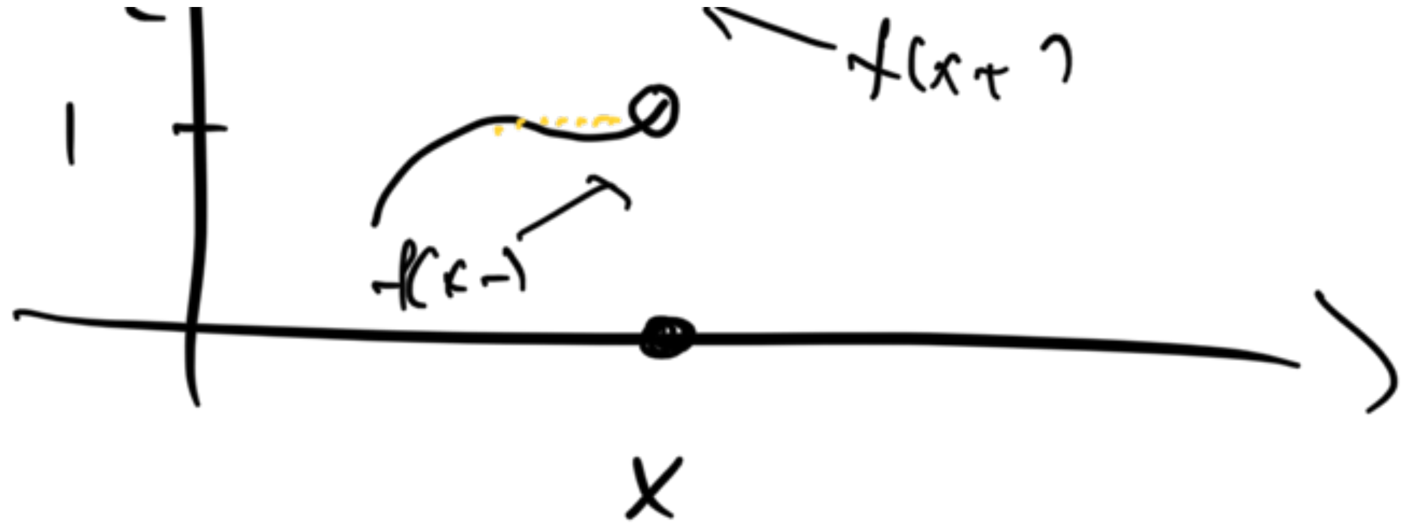
När konvergerar Fourierserien, och mot vad?

Notation: vänster & höger gränsvärden:

$$f(x+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h)$$

$$f(x-) = \lim_{h \to 0^-} f(x+h)$$

konvention: ifylld prick $\Rightarrow f(x) = 2$

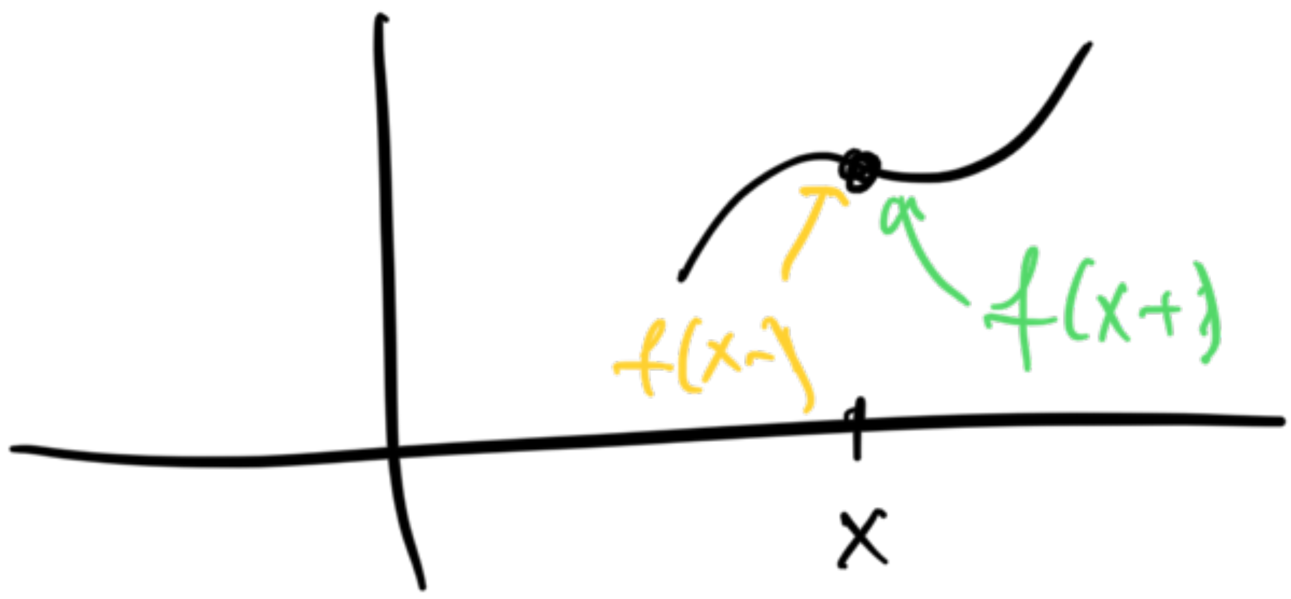


$f(x+) = 2 \quad , \quad f(x-) = 1.$

Sats: Antag att f & f' är $2p$-periodiska och styckvist kontinuerliga på $[-p, p]$. Då konvergerar Fourierserien till f i varje punkt x mot

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Anm: Om $f(x)$ är kontinuerlig i punkten x, så är $\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x)$

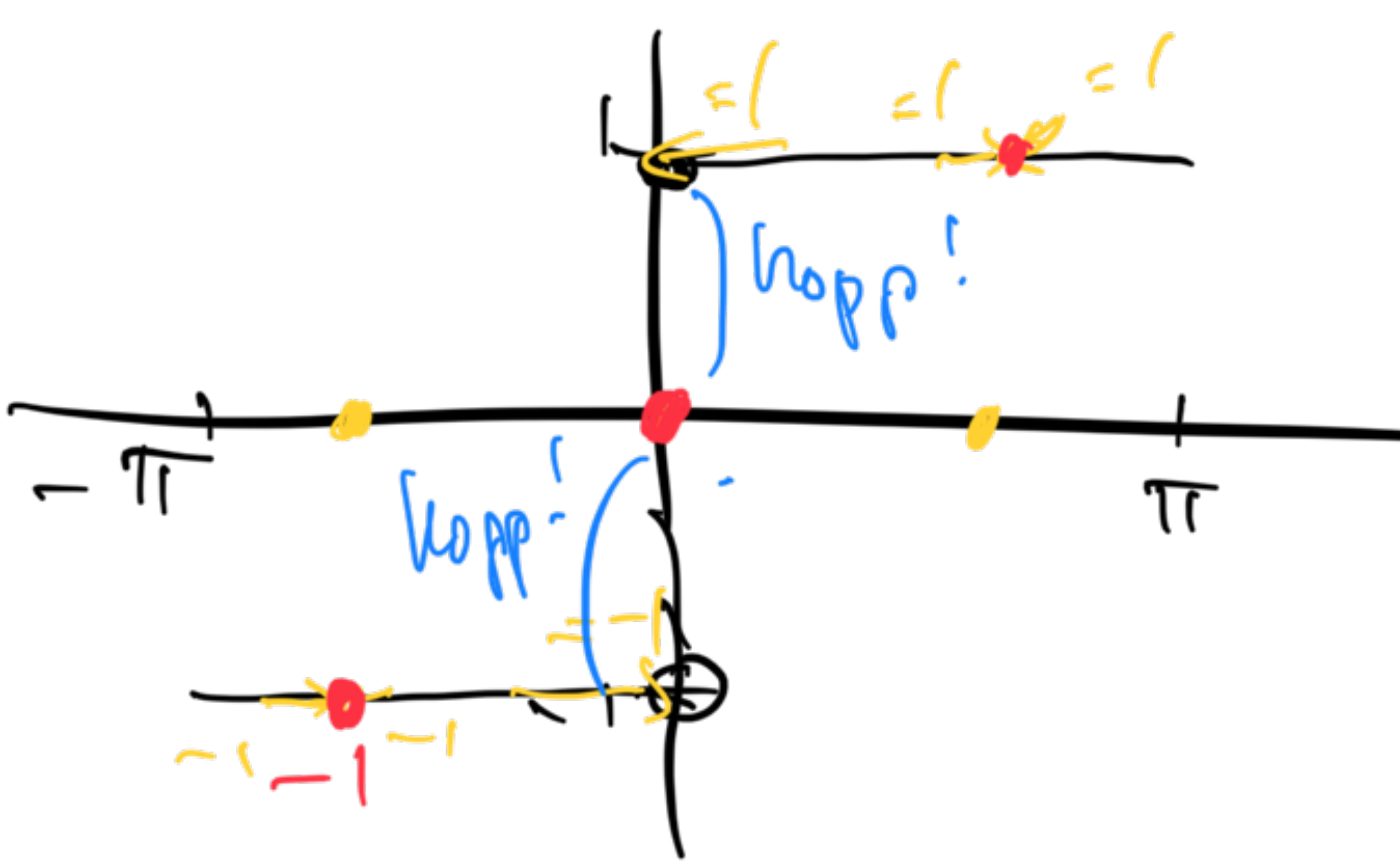


Poäng: f kontinuerlig vid $x \Longrightarrow f(x-) = f(x+) = f(x)$

$$\Longrightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x).$$

Ex: Vårt exempel: $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ -1 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$

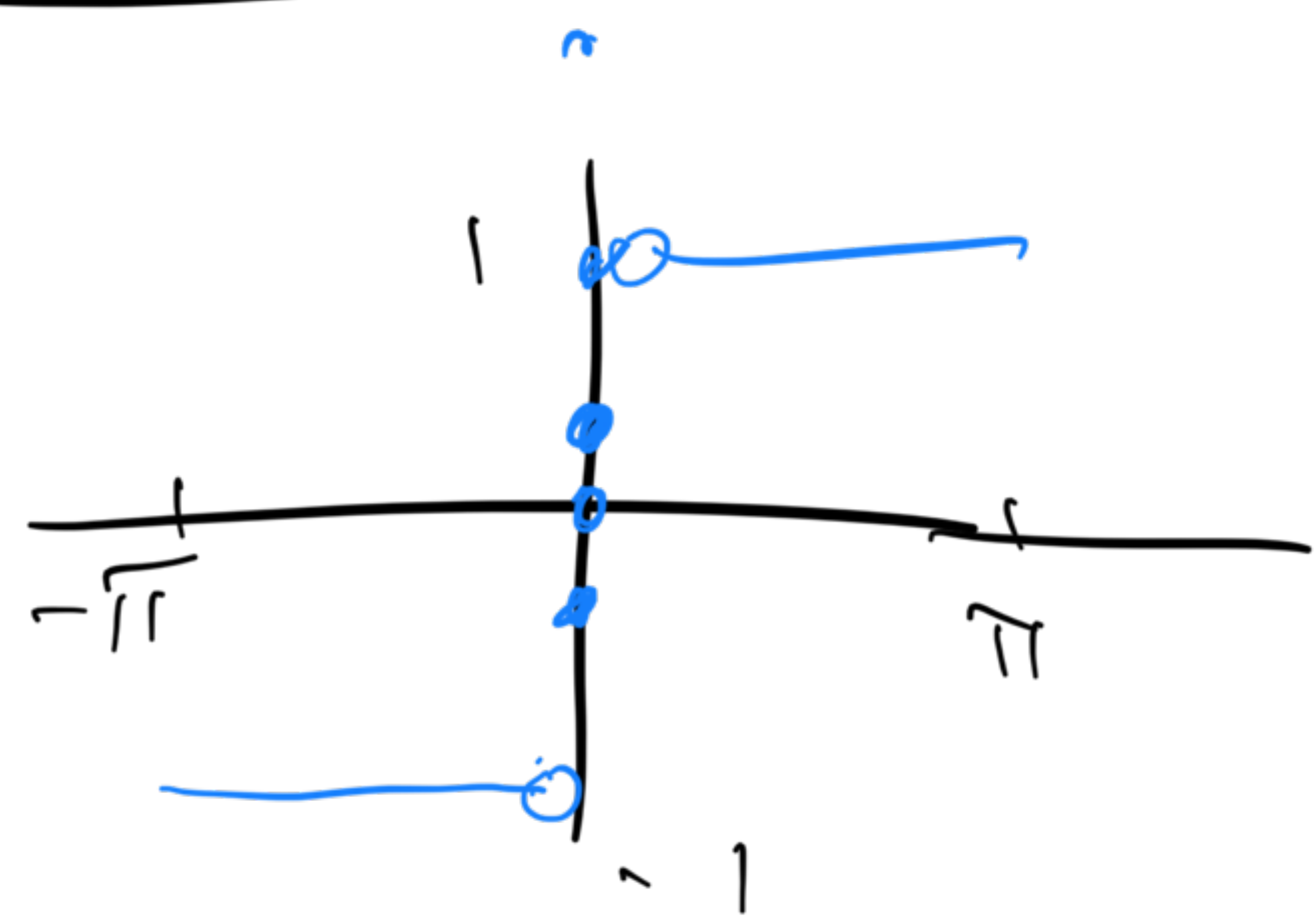
$f(0) = 1$



Fourierserien konvergerar

mot: $\begin{cases} 0 & \text{om } x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0. \end{cases}$

(utvidga periodiskt!).



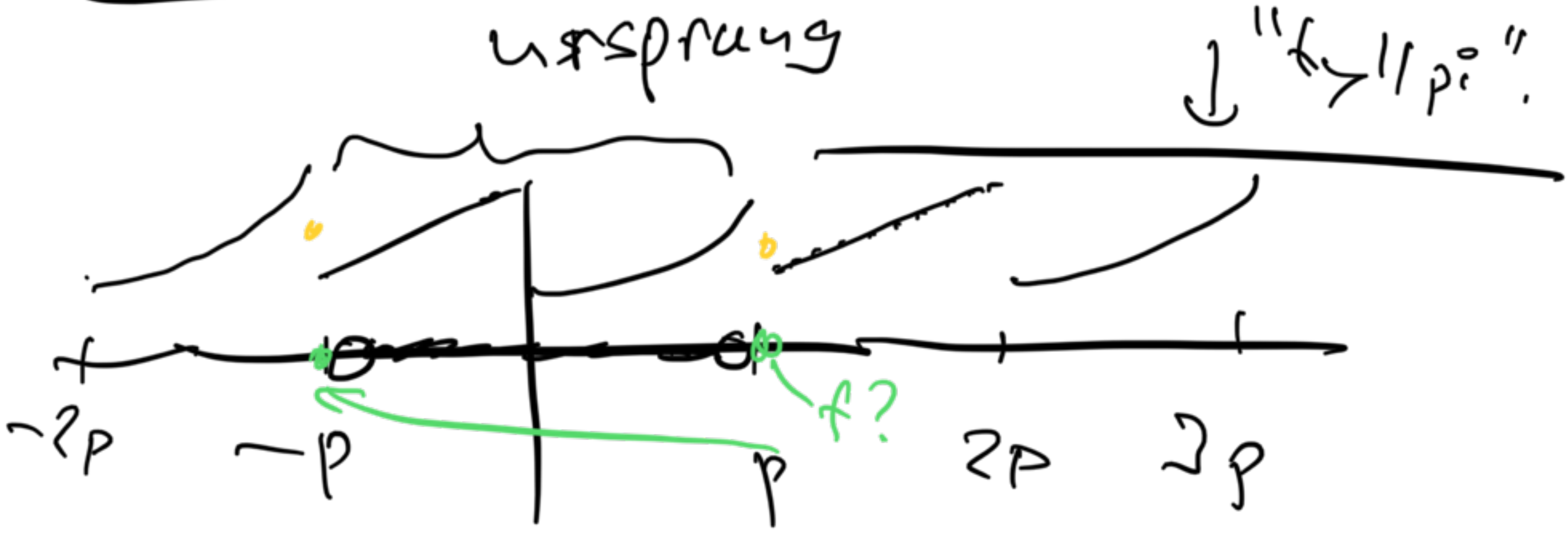
$f(0) = \alpha$, α "vad som helst!"

$f(0) = 1$

$f(0) = -1$ "rimligen".

Fourier: väljer alltid

$f(0) = 0.$



$f(x) = \ldots$ för $x \in (-p, p)$

Om f nu görs $2p$-periodisk

Kort rep.

Startpunkt: f definierad på $[-p, p]$.

Fourierserien till f:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)$$

OBS: vänst HL automatiskt $2p$-periodisk

Dvs: även f bara definierad på $[-p,p]$, så kan vi "utvidga" f till alla reella tal om vi insisterar på

2p-periodiskhet.

"enkel" formel då vi har ortogonala funktion-er

Kom ihåg:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot 1\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$
$(n>0)$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$
$(n>0)$

[Viktigt: $\left\{1, \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{p}\cdot x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}\cdot x\right) \ldots\right\}$

oändligt mängd

är en <u>ortogonal</u> mängd

på $(-p, p)$.

Ortogonal? Vår "konstiga" inre produkt $= 0$.

f_1, f_2 ortogonal $\Longleftrightarrow$

$$(f_1, f_2) = \int_{-p}^{p} f_1(x) f_2(x)\,dx$$

<u>Ex</u>: $f_1 = x$, $f_2 = x^2$

och $I = [-1, 1]$

$$\Longrightarrow (f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

x^3 : udda!

(|

Ø: $(f_1, f_2) \neq 0$ om

vi tar $I = [0,1]$.

$$(f_1, f_2) = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \int_0^1 x^3 \, dx > 0$$

$x^3 \geq 0$

Viktig: Om $(f,f) = 0$

$\Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

Vanlig: Jo: $(f,f) =$

$$= \int_I f(x) \cdot f(x) \, dx = \int_I \underbrace{f(x)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \forall x}} \, dx$$

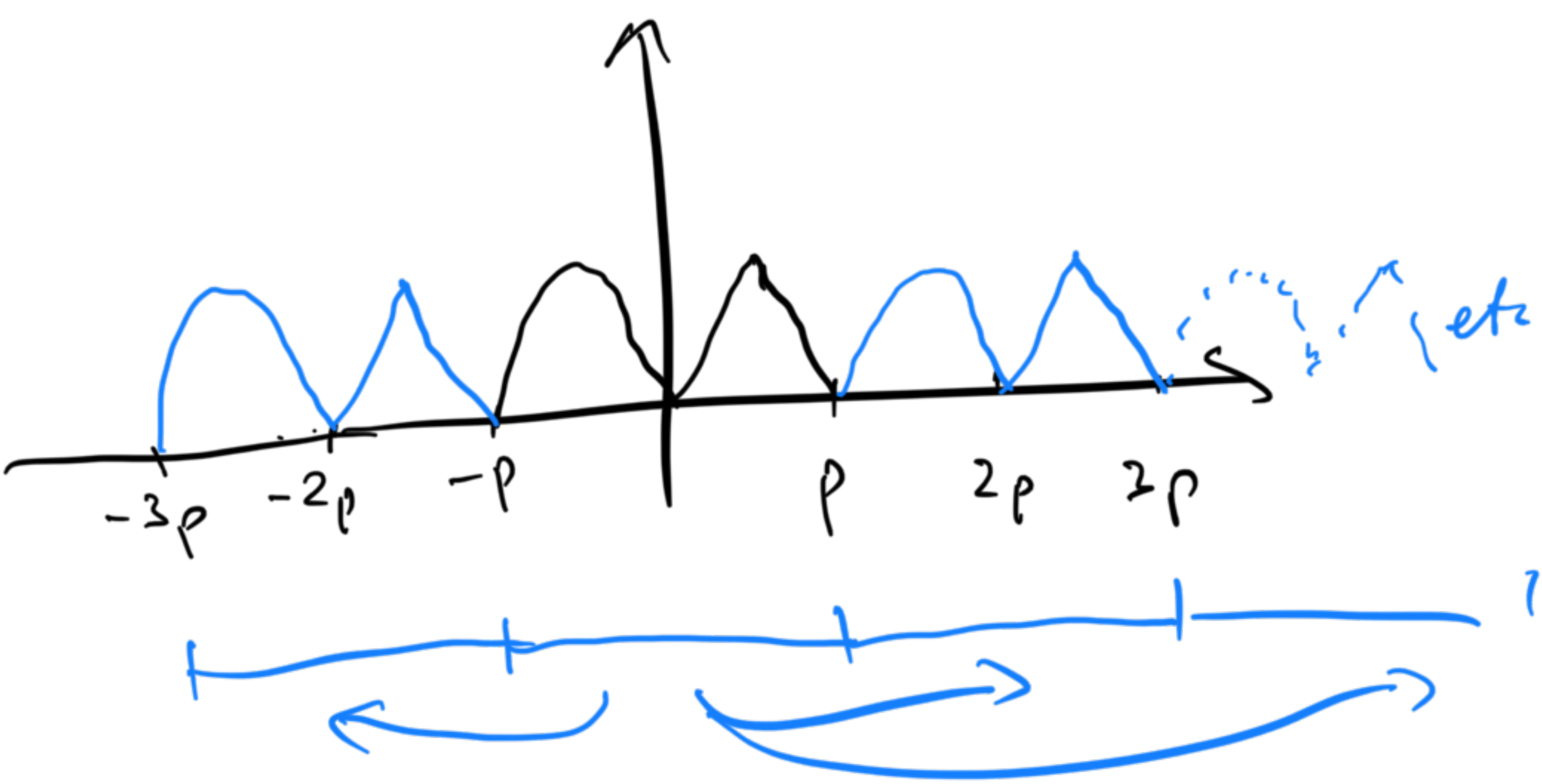
Så: $\int f(x)^2 dx = 0$

$\Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$.

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}$$

Peridisk utvidgning :

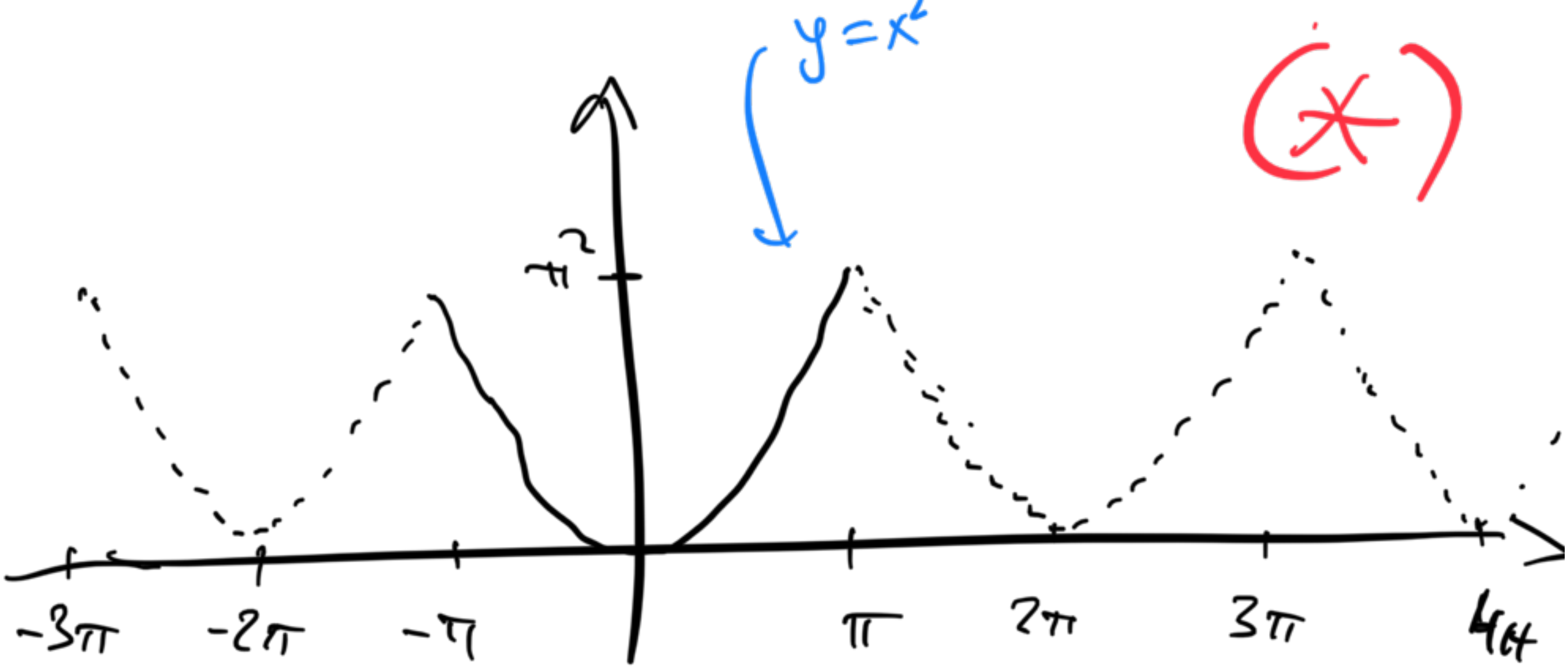
Anta att f är definierad på $(-p,p]$. Vi kan då "utvidga" f till en funktion för alla reella tal. "BILD"



Ex: (periodisk utv. + Fourierl.

Låt $f(x) = x^2$ för $|x| \leq \pi$,

och utvidga 2π-periodiskt.



"Flytta $y = x^2$ till höger/vänster

med $2\pi, 4\pi, 6\pi$ (höger /

$-2\pi, -4\pi, -6\pi$ (vänster).

Räkning visar: f har

Fourierserien:

(anm: f jämn $\Rightarrow$ bara cos

(+ konstant) kan vara med!

$\therefore$ Inga sin!)

$$\rightsquigarrow \pi^2/3 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n \cdot x)$$

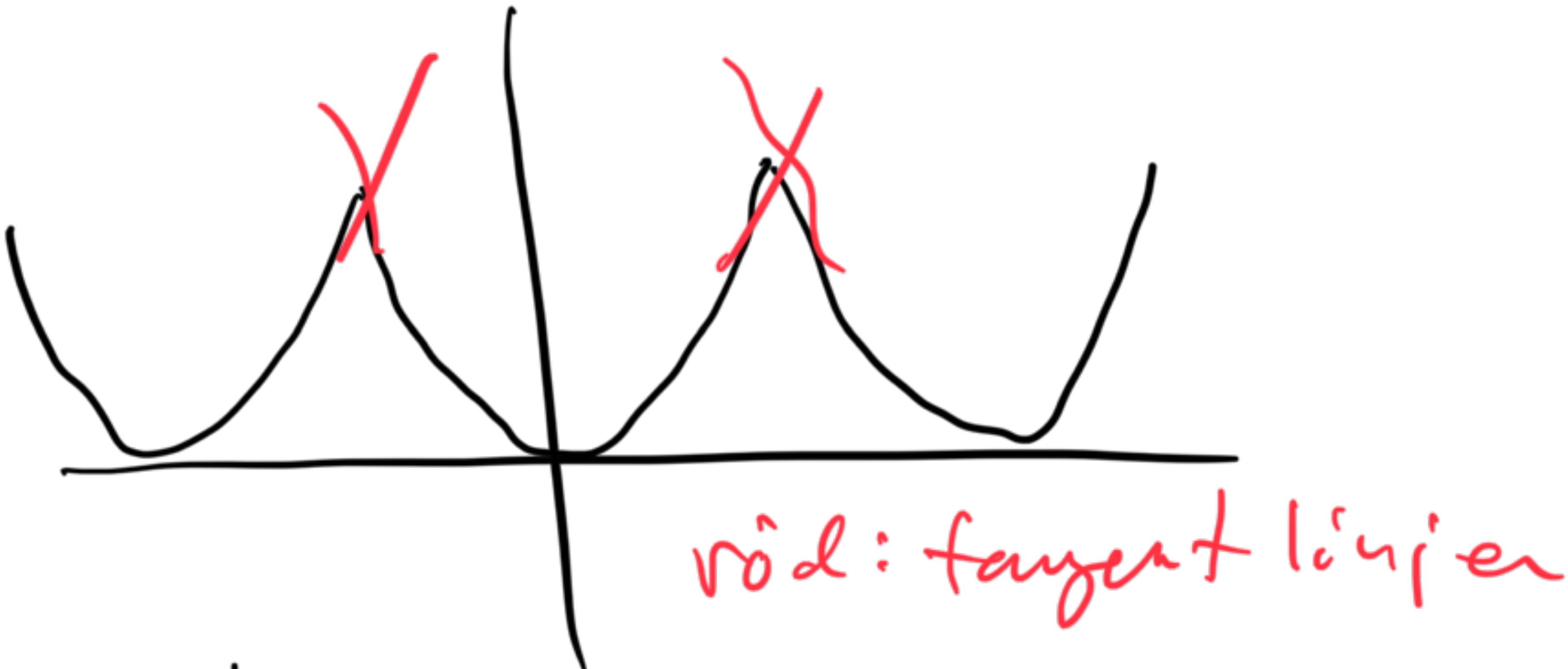
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{n \cdot p}{\pi} \cdot x\right) \\ \text{men } p = \pi \\ \rightsquigarrow \cos(nx) \end{array}}$$

När konvergerar serien, och till vad??

Sats: f (& f') styckvis kontinuerliga $\Rightarrow$ konvergens (mot $f(x)$ om f kont. i x, annars mot $\frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$ annars).

Enligt bild (*) är f uppenbart kontinuerlig vid alla $x \in \mathbb{R}$.

Men: f' ej kontinuerlig!



∴ f' ej kontinuerlig,

men den är <u>styckvis</u> kontinuerlig!

∴ Satsen gäller!

Aha! f kontinuerlig <u>överallt</u> ⇒

Serien konvergerar mot $f(x)$ överallt. !

Vi får:

$$(1)\quad \underbrace{x^2 = f(x)}_{(\text{för } |x|\le\pi)} = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos(nx).$$

Ö: (om du gillar datorer): plotta HL för $\sum^{N}$

$n=1$

och $N = 1, 2, 10, 20, 100, 1000.$)

Historiskt problem "Basel" löstes av Euler: vad är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad ? \qquad \text{Euler: } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6.$$

Hur (vi kan se mha Fourier!)

Om vi sätter in $x = \pi$ i (1)

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{\cos(n\cdot\pi) = (-1)^n}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n^2}$$

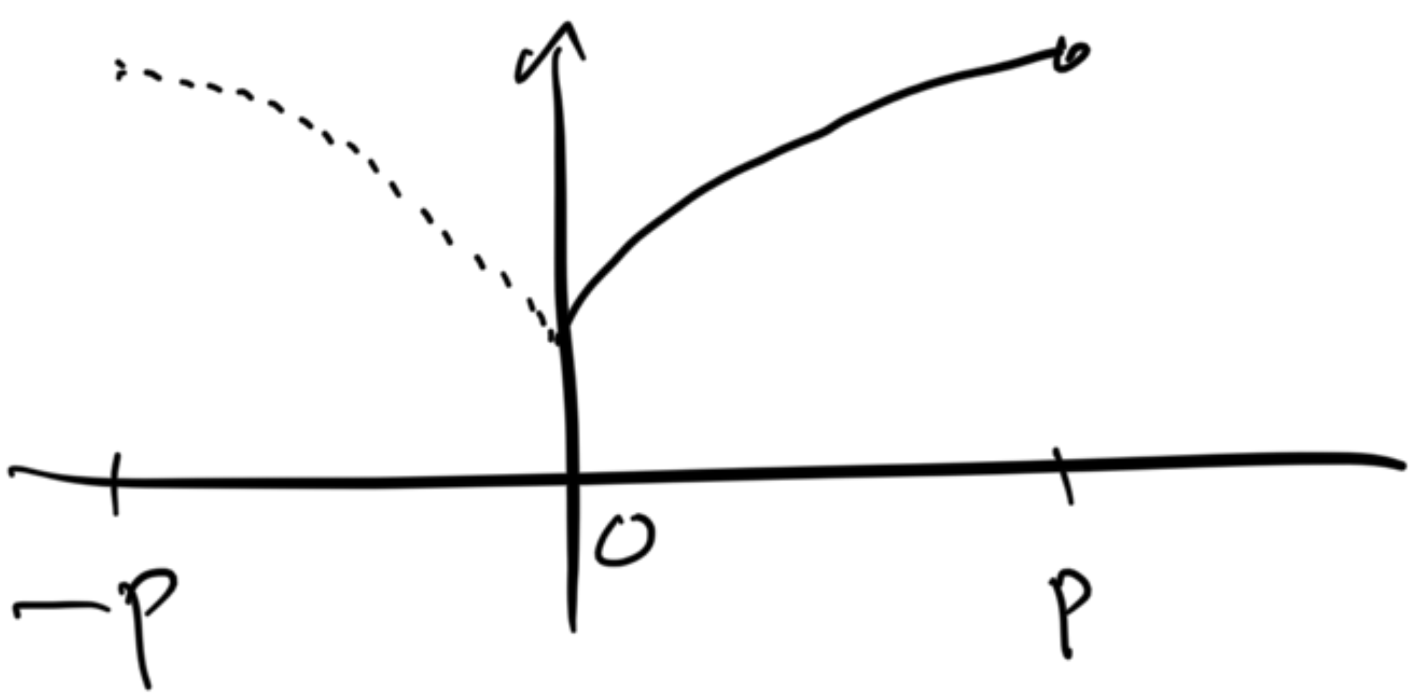
$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2/3}{4} = \frac{\pi^2 \cdot \frac{2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

!!!

Cosinus & sinus serier (11.3)

Cosinusserie: Antag att f är definierad på $(0,p)$. Utvidga f till $(-p,p)$ som jämn funktion (dvs $f(-x)=f(x)$).



(spegla grafen i y-axeln).

Då har vi Fourier koeff:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx \\ a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right)dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right) dx \end{cases}$$

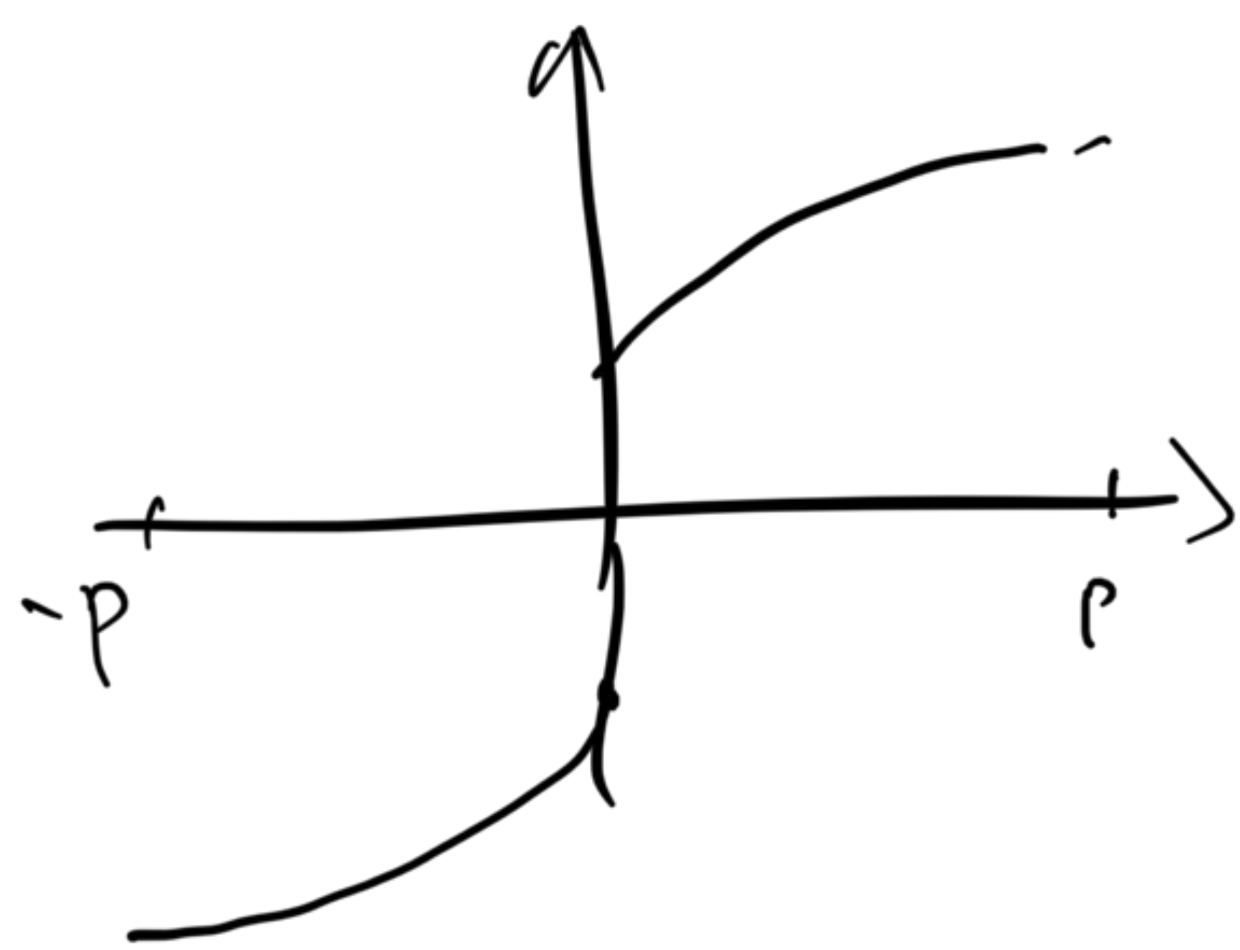
$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} (\text{udda})\,dx = 0$$

$\therefore$ Utvidning av f som jämn funktion ger en ren cosinusserie.

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\cdot\pi}{p}\cdot x\right)$$

cosinus serie.

Sinusserie: Utvidga f som udda funktion



P.S.S. tidigare:

$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad \forall n$

(vi integrerar udda fn på $(-p, p)$.)

Kvar: "Sinus av":

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) dx$$

och $f(x) \sim \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{p} x\right)}_{\text{sinus-serie.}}$

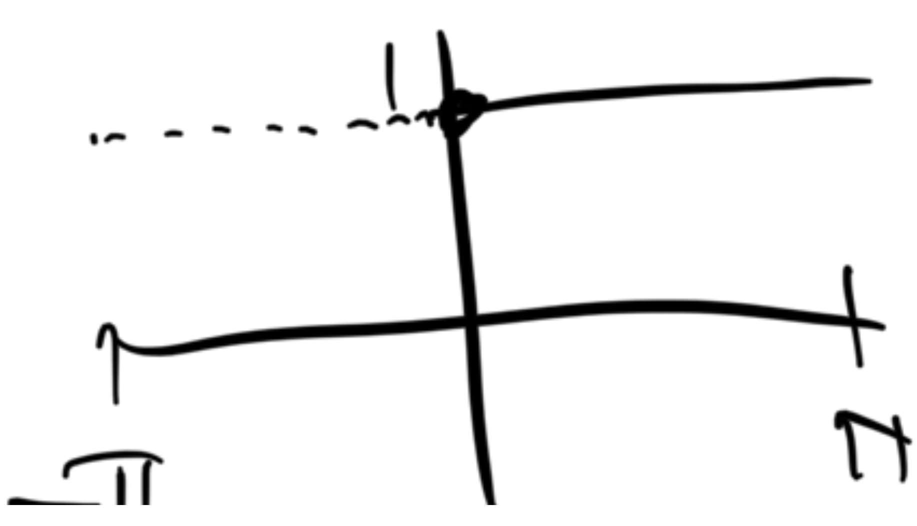
Ex: Låt $f(x) = 1, \quad 0 \leq x < \pi$

Utveckla f i :

a) cosinusserie

b) sinusserie.

Lösn: notera $p = \pi$



Vi har $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\pi = 2.$

($\cancel{\text{ex.}}$ $b_n = 0 \quad \forall n$!)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(0-0) = 0$$

$\therefore$ f har cosinus serien

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

b) Vi har

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx = [F12]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

$\therefore$ f har sinusserien

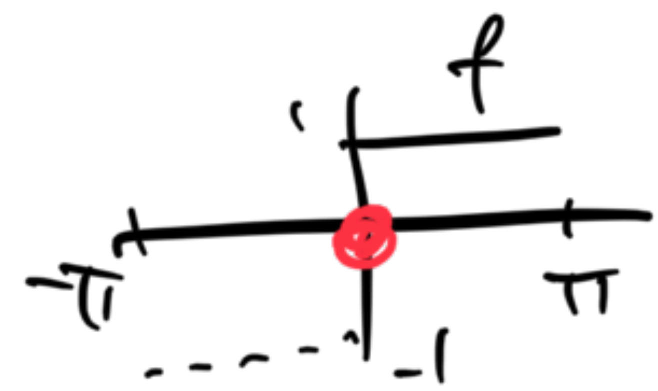
$$f(x) \sim \sum^{\infty} b_n \sin(nx) = ?$$

$n=1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\cdot \sin(nx)$$

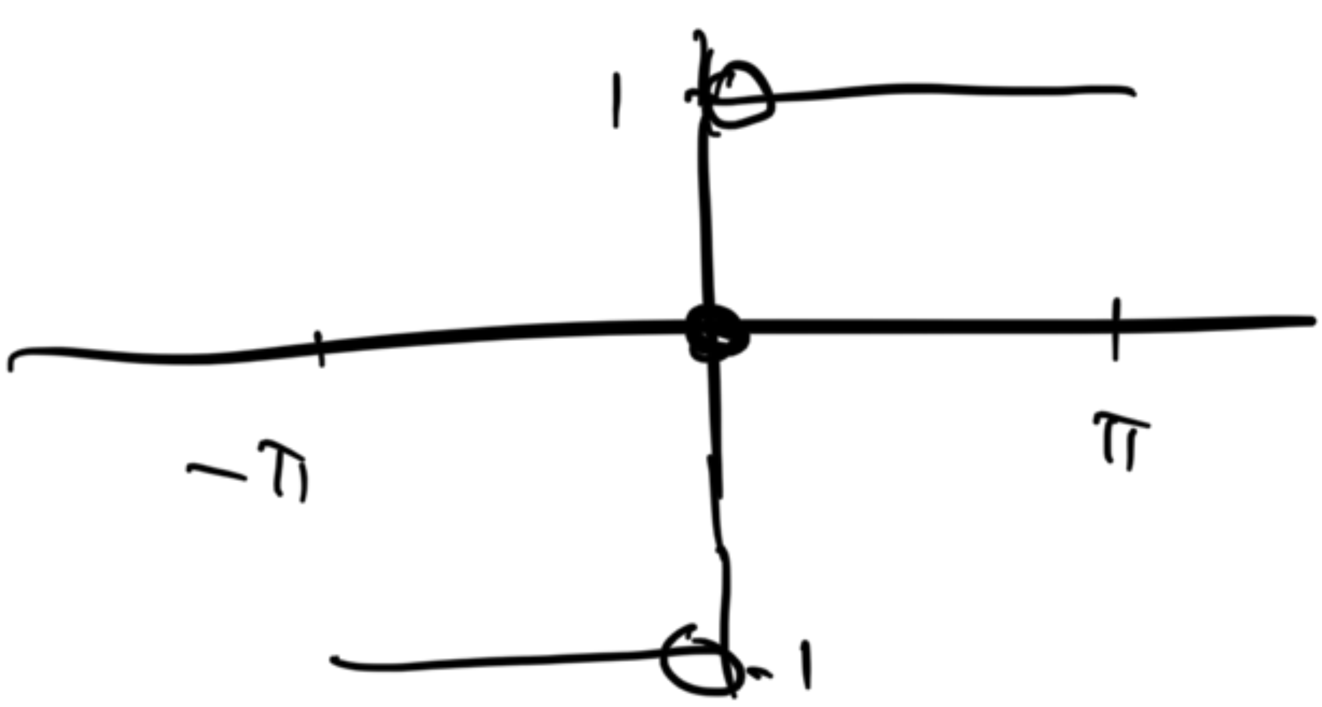
Serien är konvergent $\forall x$

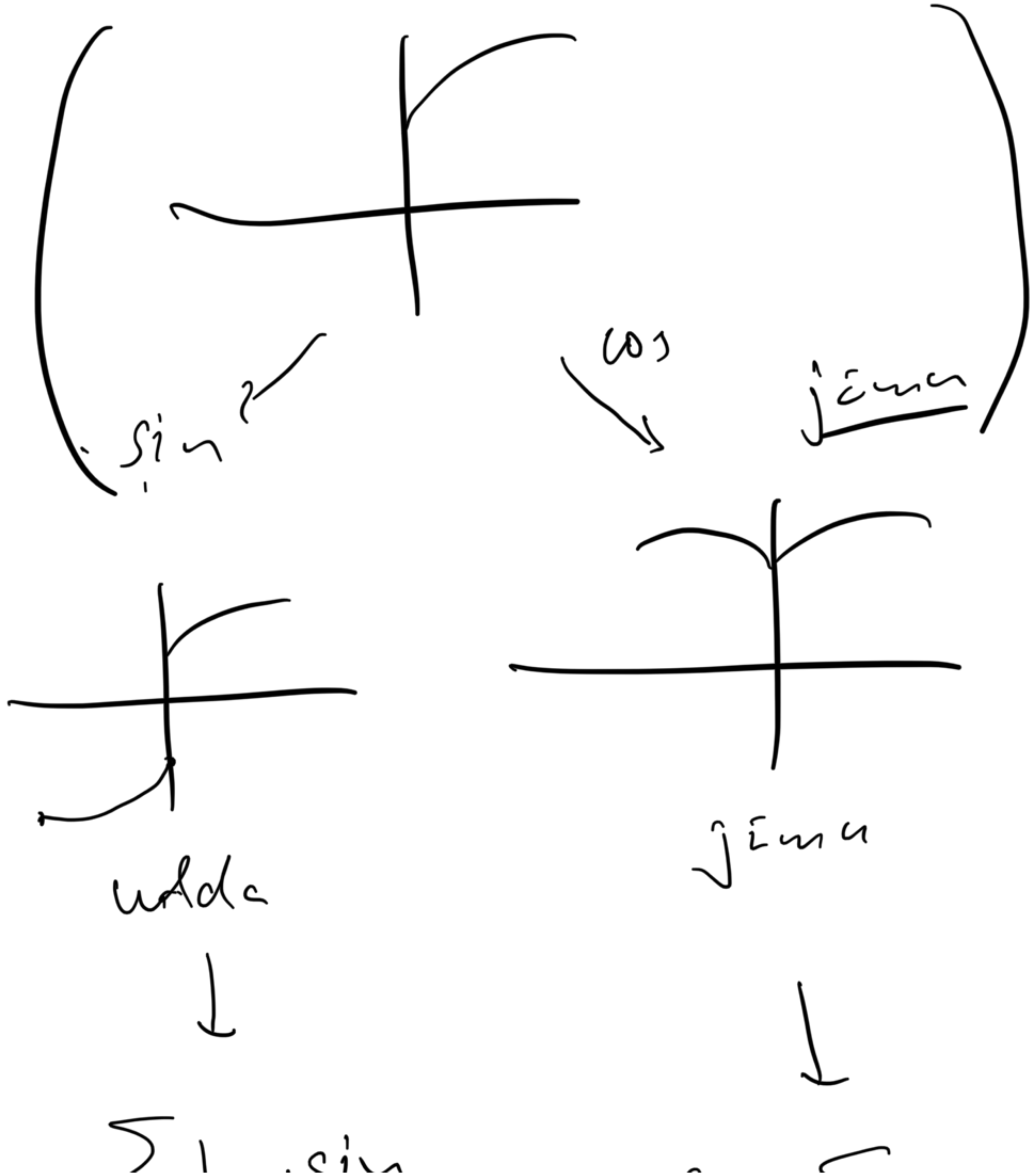
och konvergerar mot



$$\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ -1 & -\pi<x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Graf av $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$:




sin?
cos
jämn
udda
jämn