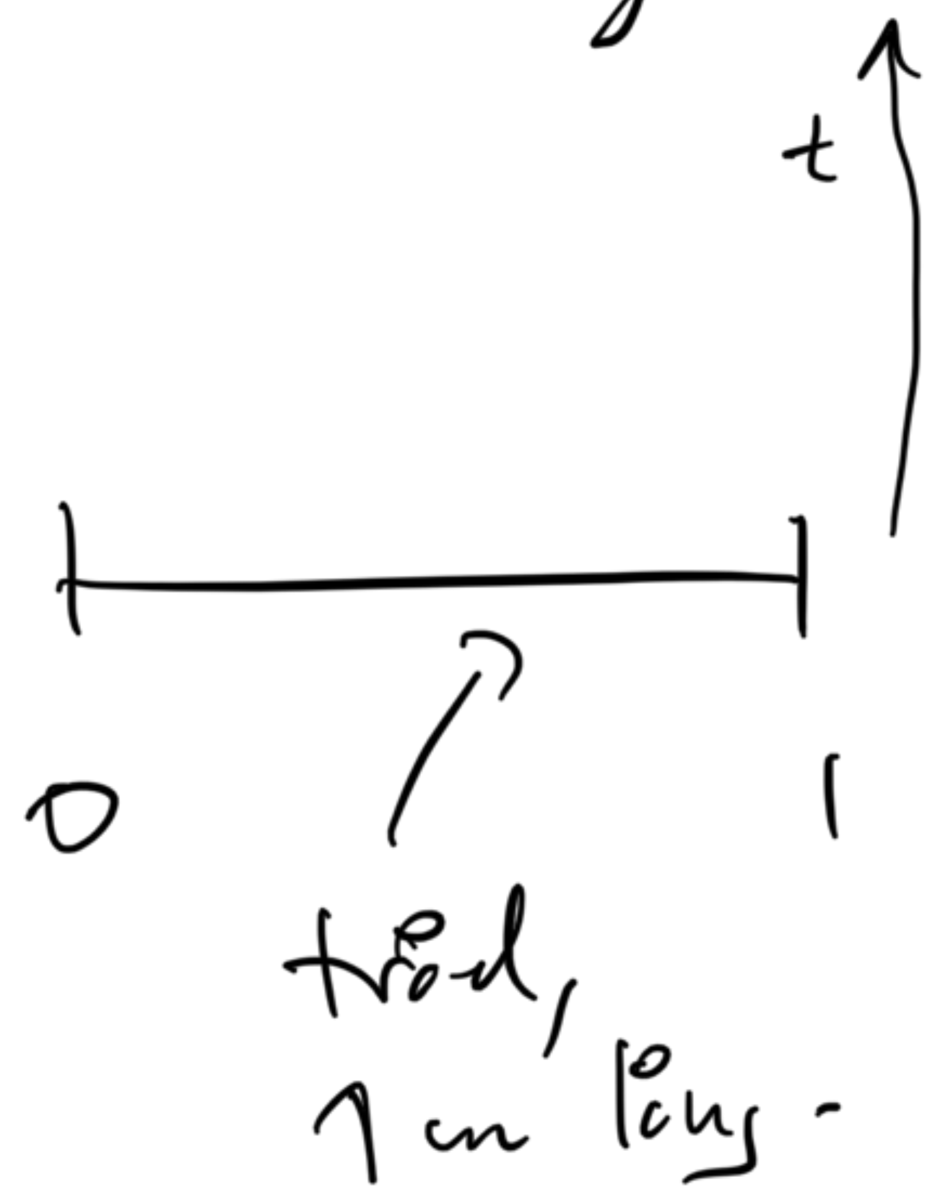
SF1633, #12 – Fourier serier
(Kap. 11)

Motivering: lös värmelednings-ekvationen.



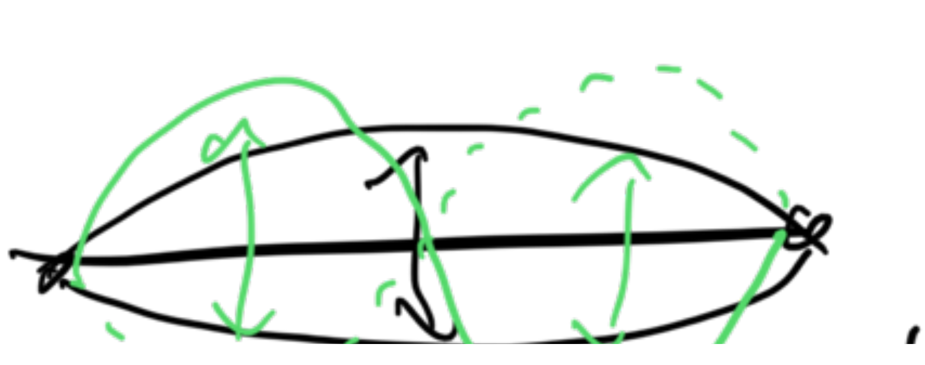
Finn funktion

$u(x,t)$ så att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

BV:
- $u(x,0) = f(x)$ $\quad \uparrow_{t=0}$ $\quad \uparrow$ initial värmefördelning
- $u(0,t) = 0$, $\quad u(1,t) = 0$ ("kyler ändarna" så temp konstant.)

Vågekvation:



Fourierserie: "bas" av funktioner

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \ldots$

så att om f är definierad $[a, b]$ så kan f skrivas som:

$$f(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + c_3 \phi_3(x) + \ldots$$

oändligt många termer!

Jfr: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

(Taylor serie).

"Bas"!? Jfr lin. alg.

<u>Ex</u>: $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

är <u>bas</u> för $\mathbb{R}^2$;

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \bar{e}_1 + b \cdot \bar{e}_2 \quad , a, b \in \mathbb{R}$$

(på <u>precis ett</u> sätt.).

Ortogonala funktioner (Kap 11.1)

Inre produkt (skalärprodukt):

från lin. algebran —

om $\bar{u}, \bar{v}$ är vektorer

skriver skalärprodukten

$\bar{u} \circ \bar{v}$ (eller $(\bar{u}, \bar{v})$ eller $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$).

<u>Ex</u>: $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow \bar{u} \circ \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$$

$$= 2 + 2 = 4.$$

<u>Anm</u>: Om $\bar{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ så

är $\bar{u} \circ \bar{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot a + b \cdot b$

$$= a^2 + b^2 = \|\bar{u}\|^2$$

$\|\bar{u}\|$: längd av $\bar{u}$.

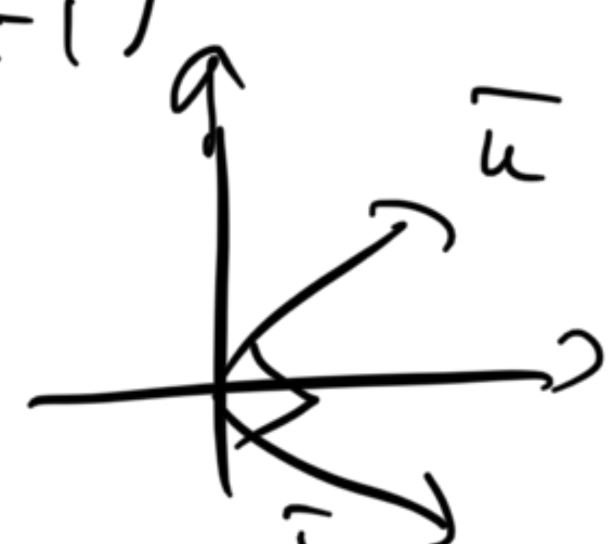
Inreprodukt av <u>funktioner</u>

f_1, f_2 på $[a, b]$. definieras av:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx$$

<u>Ortogonala vektor</u>:

Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Då är $\bar{u} \circ \bar{v} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)$$
$$= 1 + (-1) = 0.$$

Säger att $\bar{u}, \bar{v}$ är ortogonala

om $\bar{u} \circ \bar{v} = 0$.

Def: Funktionerna

f_1, f_2 på $[a,b]$ är

ortogonala omm $(f_1, f_2) =$

$$= \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = 0$$

Ex: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$,

är ortogonala på $[-1,1]$.

Ty: $(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x)\, dx$

$$= \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Paus-övning: är x, x^2 ortogonala på $[0,1]$?

$$(x, x^2) = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \int_0^1 x^3 \, dx$$

på $[0,1]$!

$$= \left[x^4/4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

EJ ortogonala!

Def: En mängd av funktioner

$$\{ \phi_0(x), \phi_1(x), \ldots \}$$

(∞ många element ok!)

är ortogonal på $[a,b]$

om funktionerna är

<u>parvist ortogonal</u>, dvs

$$(\phi_m, \phi_n) = 0$$

om $m \neq n$.

<u>Def</u>: <u>Normen</u> $\|f\|$

definieras som:

$$\|f\| = (f,f)^{1/2} = \left(\int_a^b f(x) \cdot f(x)\, dx \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

"längd av f".

<u>Def</u>: $\{ \phi_0(x), \phi_1(x), \ldots \}$

är <u>ortonormal</u> på $[a,b]$

om mängden är <u>ortogonal</u>

och $\|q_i\| = 1$ för varje

$i = 0, 1, 2, \ldots$.

På väg mot Fourier koefficienter...

Ex: Antag att $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är

en ON-bas (dvs ortonormal)

på $\mathbb{R}^2$. (Dvs $\|\bar{v}_1\| = 1 = \|\bar{v}_2\|$

och $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$.)

Varje vektor $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$

kan skrivas som

$$\bar{v} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 \; ;$$

hur hittar vi c_1 & c_2?

Notera:

$$\bar{v} \circ \bar{v}_1 = (c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2) \circ \bar{v}_1$$

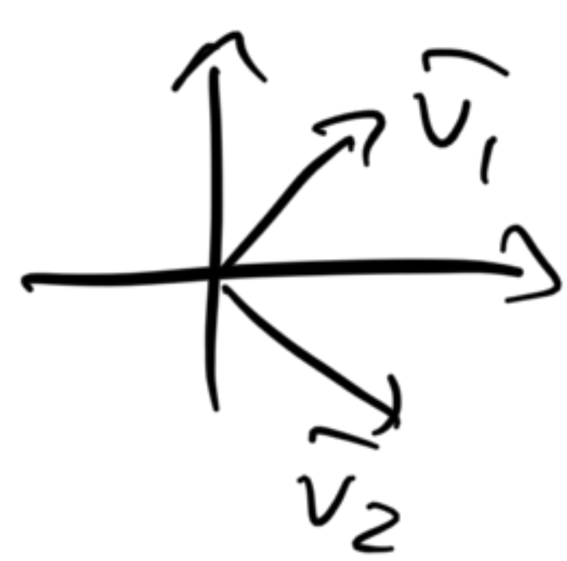
$$= c_1 \underbrace{\bar{v}_1 \circ \bar{v}_1}_{=1} + c_2 \underbrace{\bar{v}_2 \circ \bar{v}_1}_{0} =$$

$$= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = c_1$$

Poäng: Kan hitta c_1 mha inre produkt!

P.S.S. ser vi att $c_2 = \bar{v} \circ \bar{v}_2$

Ex: $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2$$

$$c_1 = ? \quad c_2 = ?$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\bar{e}_1} + c_2 \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\bar{e}_2}$$

$c_1 = 3,\ c_2 = 5$

<u>Men:</u> $c_1 = \cancel{8}\,\bar{v} \circ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \right) = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

Antag att $\{ \phi_n \}_{n=0}^{\infty}$ är ON-mängd på $[a, b]$.

<u>Om</u> $f(x) = c_0 \cdot \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \ldots$,

hur hittar vi c_0, c_1, etc?

Hur välja / hitta?

$\boxed{\text{Mini-övning: Klura!}}$

Jo: P.S.S. (på samma sätt!)

Som för $\mathbb{R}^2$

$$c_n = (f, \phi_n).$$

Anm: Om $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ bara är ortogonal (dvs ej normerad) så gäller: $c_n = \dfrac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$

Kort intro/rep till summasymboler:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \sum_{n=1}^{100} n$$

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{50} = \sum_{n=0}^{50} x^n.$$

$$1 + x + x^2 + \ldots = \sum^{\infty} x^n.$$

(Anm: $x^0 = 1$.).

Konvergens!?

Formel: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^N =$

$$= \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}.$$

(Övning: kolla! Ledtråd: mult. HL & VL med $x-1$)

Om $x > 1$

så $\dfrac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \to \infty$ då $N \to \infty$

(serien divergerar!).

Om $|x| < 1$ så

$$\frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \longrightarrow \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

då $N \to \infty$

Obs: $\neq 0$

(serien ~~Ko~~ konvergera!)

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är

<u>konvergent</u> om

$$\lim_{N\to\infty}\Bigl(\sum_{n=1}^{N} a_n\Bigr)$$

↑ "partialsumma"

existerar.

[Jfr: $\int_0^{\infty} f(x)\,dx \overset{?}{=} \lim_{N\to\infty}\int_0^{N} f(x)\,dx$]

∴ $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ om } |x|<1$$

(serien konvergera då $|x|<1$.)

Fourierserier

Faktum: $\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \ldots\ldots \right\}$

bildar en ortogonal mängd

på $[-p, p]$ då $p>0$

är godtyckligt tal.

Inre produkt: $(f_1, f_2)_p =$

$$= \int_{-p}^{p} f_1(x)\, f_2(x)\, dx .$$

Antag att f kan utvecklas

kan utvecklas i en serie:

(*)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\cdot\pi}{p}\cdot x\right) \right.$$

$$+ b_n \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{p}\cdot x\right)\Bigg)$$

Då måste vi ha:

Formelsamling!

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} 1\cdot f(x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{(f(x), 1)}{\|1\|^2}$$

[som tidigare! $f = \sum c_n \phi_n$, $c_n = \dfrac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$

$\|\phi_n\|^2 = p$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{p}\cdot x\right)dx$$

och

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{p}\cdot x\right)dx$$

Anm: a_0, a_n, b_n sägs vara Fourierkoefficienter till f.

Varför $\frac{1}{p}$? Jo:

$$\left\|\cos\left(\frac{\pi n}{p}x\right)\right\|^2 = p.$$

och $\quad \left\|\sin\left(\frac{\pi n}{p}x\right)\right\|^2 = p$

MEN ($\frac{a_0}{2}$!?)

$$\|1\|^2 = \dots \quad ?$$

$$\|1\|^2 = (1,1) = \int_{-p}^{p} (1\cdot 1)\,dx$$

$$= \int_{-p}^{p} 1\,dx = 2\cdot p$$

~~Detta~~ Detta är anledningen till $a_0/2$.

Fördel: Samma integral-formel:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} 1\cdot f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\sin(\ldots)f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{p}\cdot\int_{-p}^{p}\cos(\ldots)f(x)\,dx$$

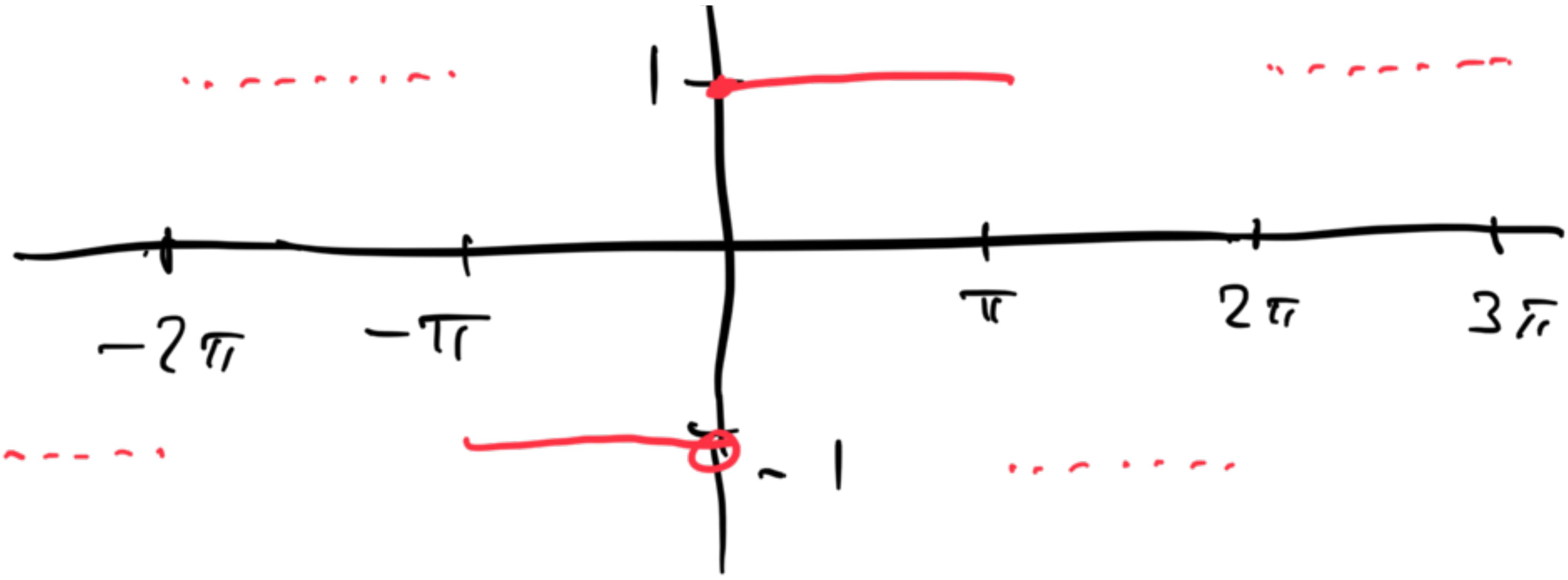
$$(*):\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{p}\cdot x\right)\right)$$

Vi säger att HL i $(*)$ är Fourierserien till $f(x)$

(på $[-p,p]$).

Ex: Låt $f(x)$ vara den 2π-periodiska funktionen s.a.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\pi\\ -1 & -\pi\le x<0\end{cases}$$



Bestäm Fourierserien till f. (Här är $p = \pi$).
(på $[-\pi, \pi]$).

Vi har $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$

($p = \pi$!)

∘ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)\,dx = 0$

udda funktion!

(Udda: $f(-x) = -f(x)$.
Jämn: $f(-x) = f(x)$)

∘ $n \neq 0$: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx =$

udda · jämn

udda · jämn = udda!

$$= 0 \quad \left(\int_{-p}^{p} (\text{udda})\,dx = 0 \right).$$

- $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\,dx$$

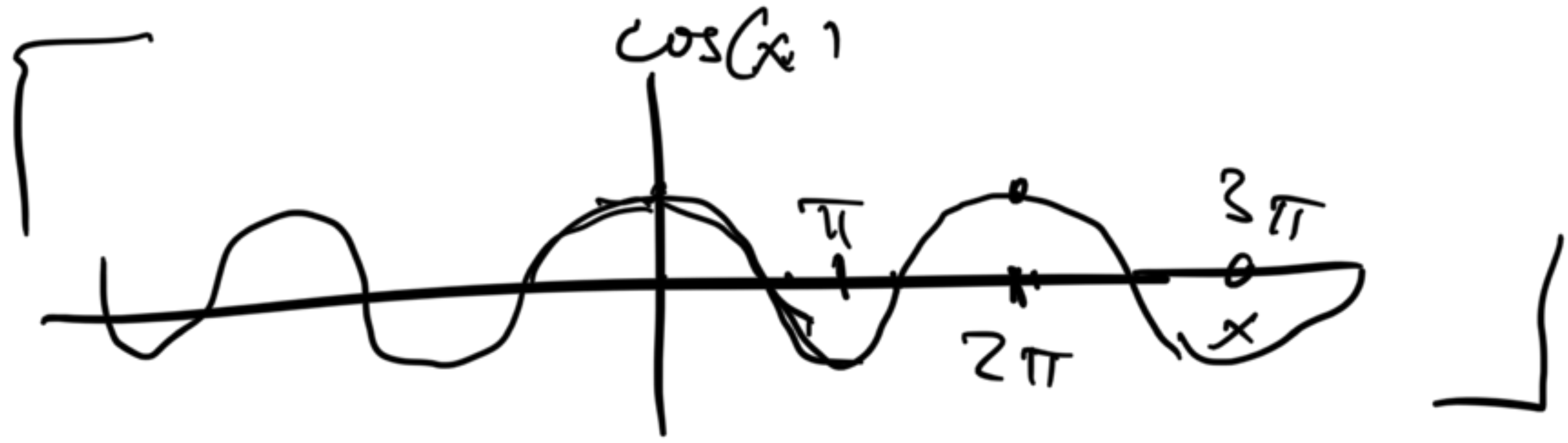
udda · udda = jämn

$f(x) = 1$ om $0 \leq x \leq \pi$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nx) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\cdot\pi)}{n} - \left(-\frac{\cos(n\cdot 0)}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(1-\cos(\pi\cdot n)\right)\right)$$



$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\underbrace{\left(1-(-1)^n\right)}_{=0 \text{ om } n \text{ jämnt}}$$

$=$

$= 2$ om

n udda.

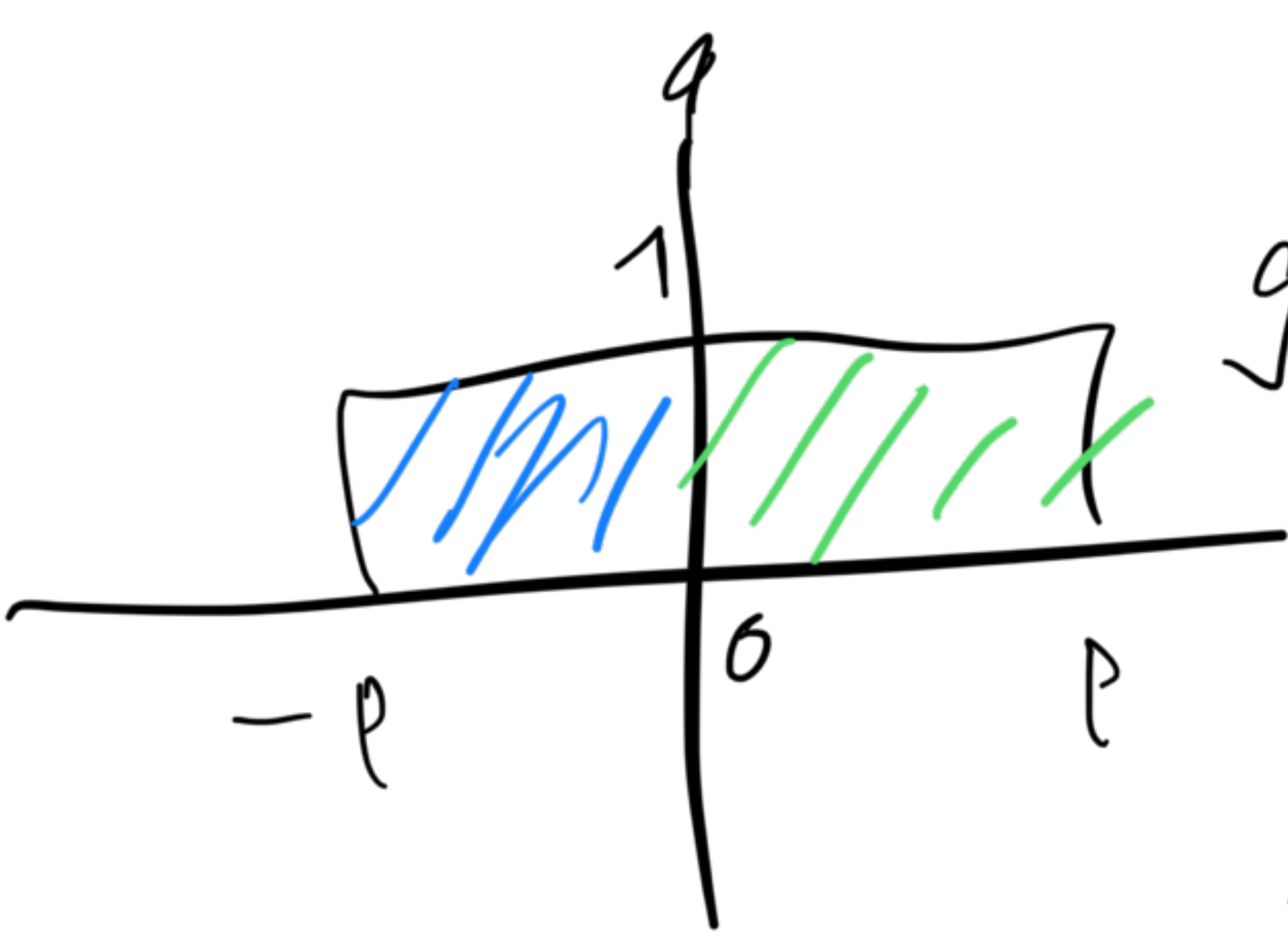
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi \cdot n} & \text{om } n \text{ udda} \\[2ex] 0 & \text{om } n \text{ jämnt.} \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \, \frac{1-(-1)^n}{n} \cdot \sin(nx)$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \sin(1 \cdot x) + \frac{4}{\pi} \, \frac{\sin(3x)}{3} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \, \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots$$



$g(x) = 1$

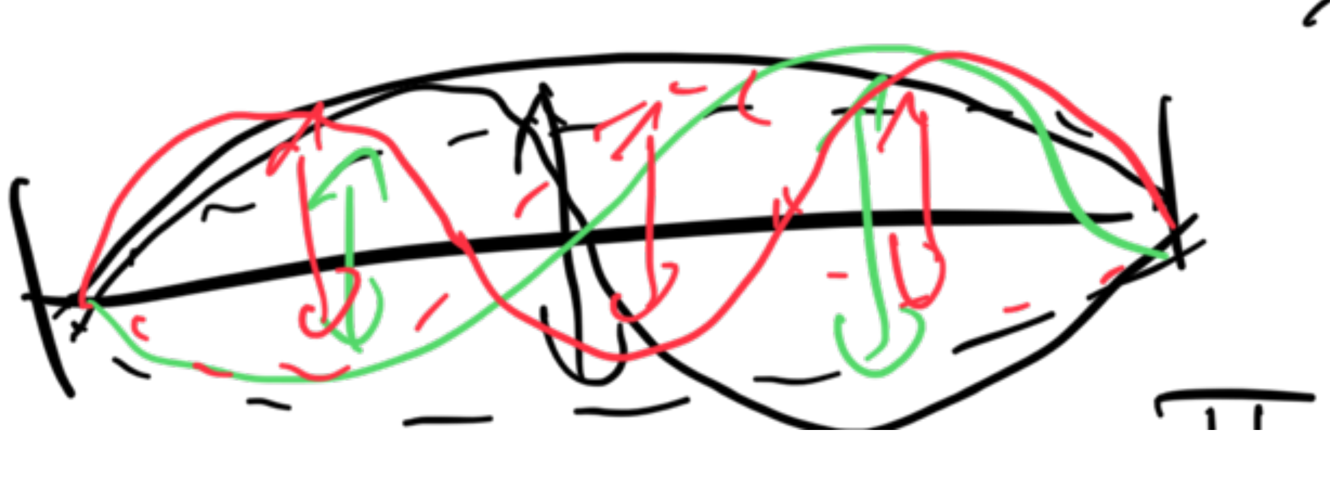
p

$$\int_{-p}^{p} g(x)\,dx = 2\cdot\int_{0} g(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx =$$

$$\int_{-\pi}^{0} (-1)\cdot\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} (1)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$\stackrel{!}{=} 2\cdot\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx$$



$\sin(x)$

$\sin(2x)$