SF1633, #11

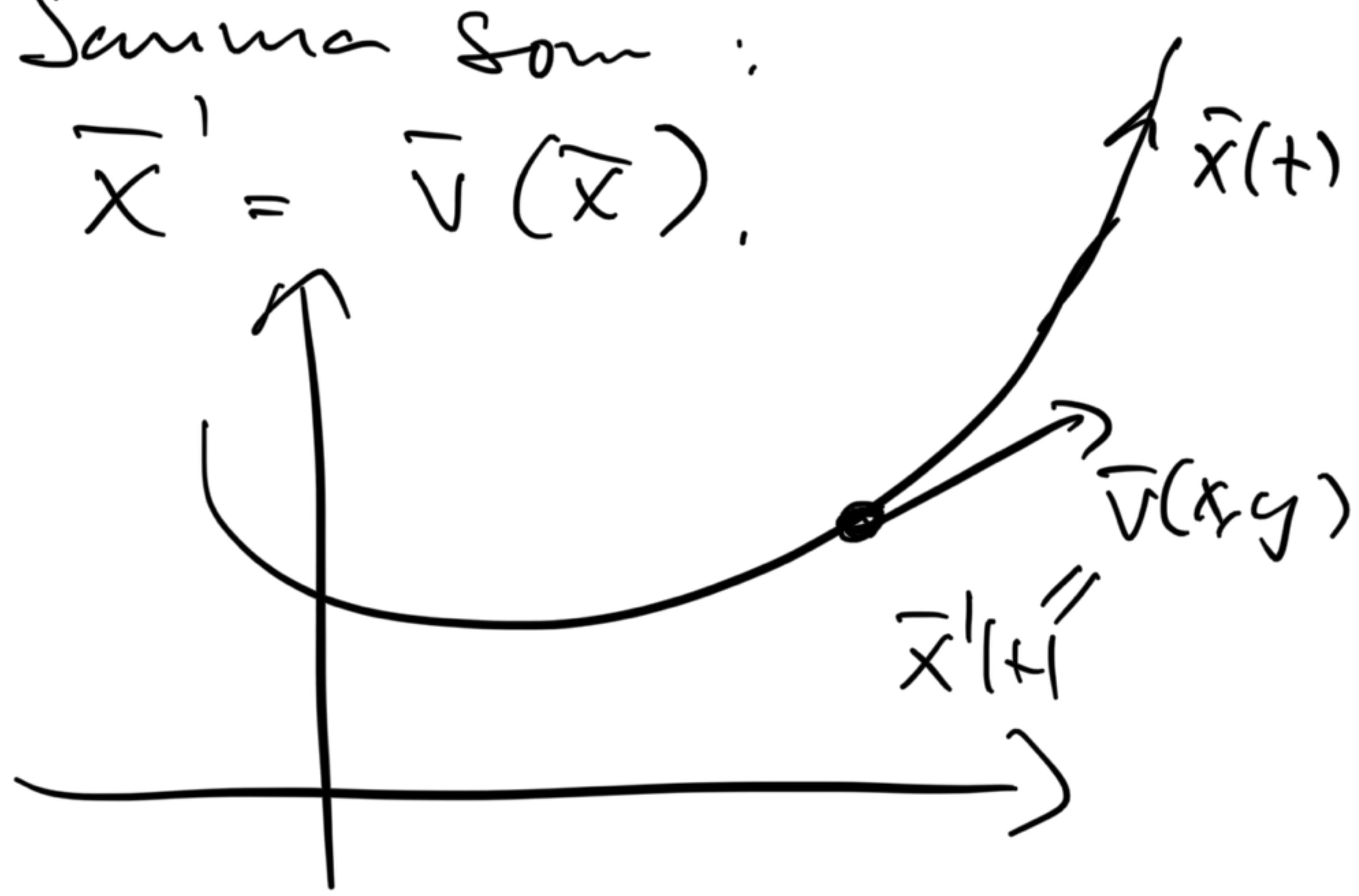
Kort rep. om autonoma system.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \bar{v}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

Samma som:

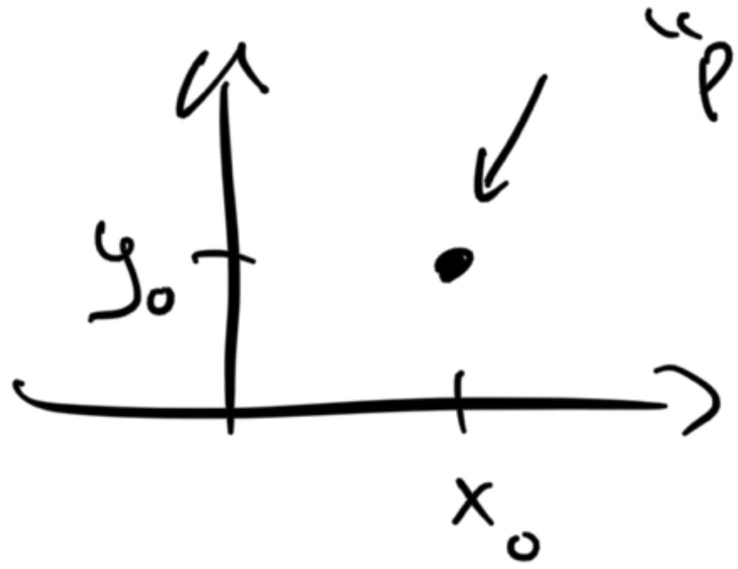
$$\bar{x}' = \bar{v}(\bar{x}).$$

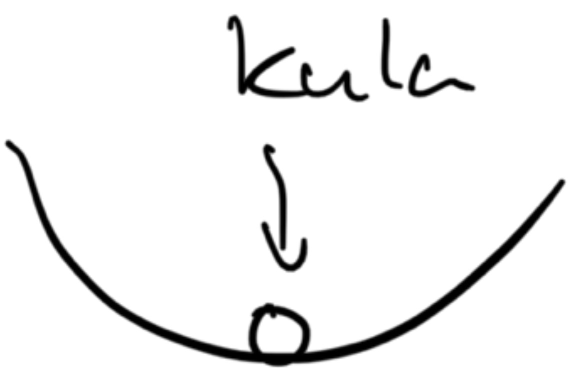


Kritiskt punkt: (x_0, y_0)

$$\bar{V}(x_0, y_0) = (0, 0).$$

"bana";
"partikel fastnar"





"stabil"

"instabilt."

Linjära system (rep):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

(aut. syst.)

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, och antag (resten av förel!) att $\det(A) \neq 0$.

Då är $(0,0)$ enda kritiska punkten! (Varför?

krit. pkt $\Leftrightarrow$ HL $= (0,0)$,

dvs $A\bar{x} = (0,0) \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

då $\det(A) \neq 0$.)

Lösningen har olika beteende beroende på A's egenvärden!

Reella & olika egenvärden:

Lösning på formen

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

- Om $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

så $\bar{x}(t) \to (0,0)$ då $t \to \infty$

oberoende av c_1 & c_2

$(0,0)$ är stabil.

(Asymptotiskt stabil!)

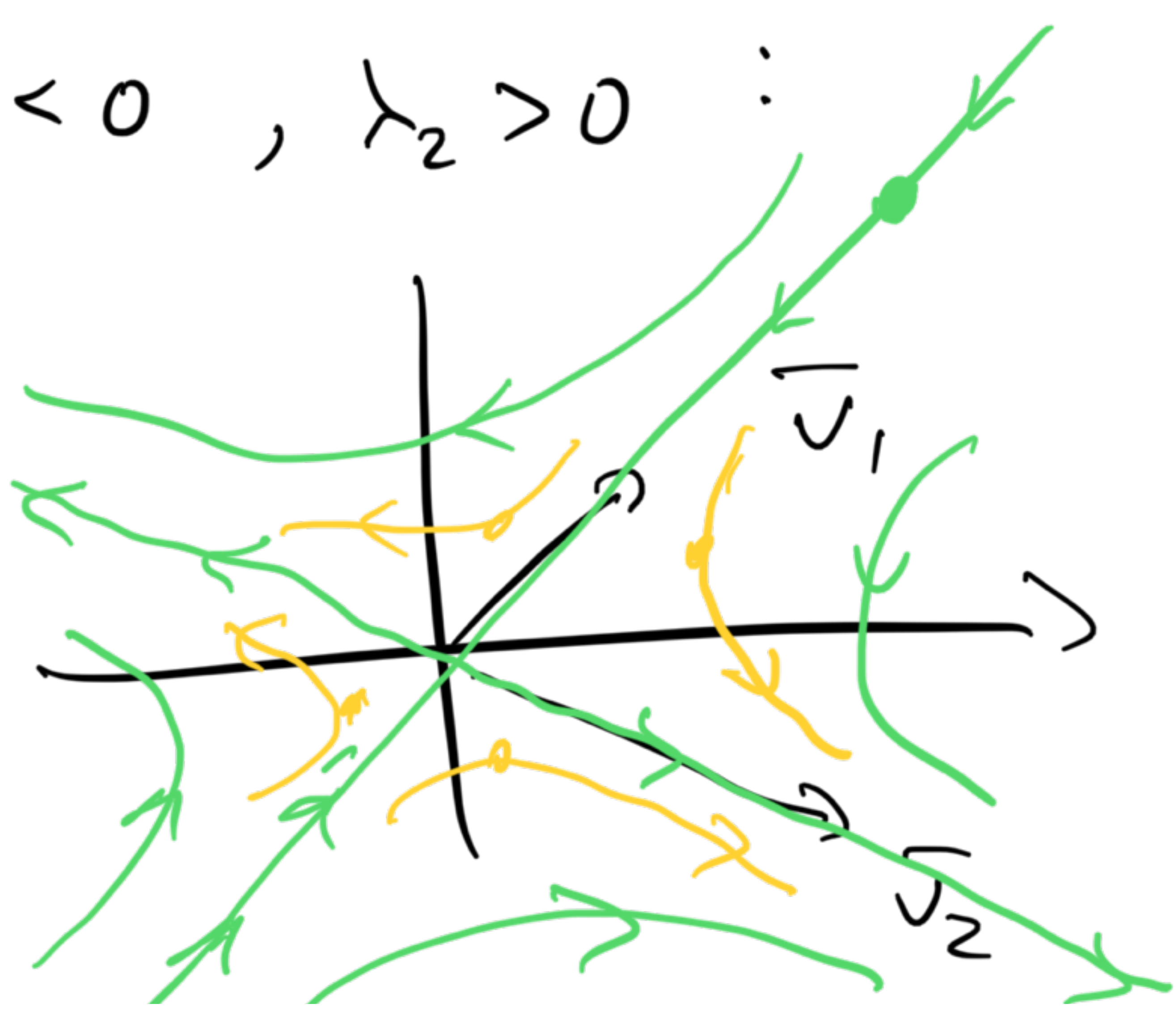
Säger: $(0,0)$ är "stabil nod".

- Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

så $|\bar{x}(t)| \to \infty$ om $(c_1, c_2) \neq (0,0)$.

$\therefore$ $(0,0)$ är instabil nod.

- Om $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$:

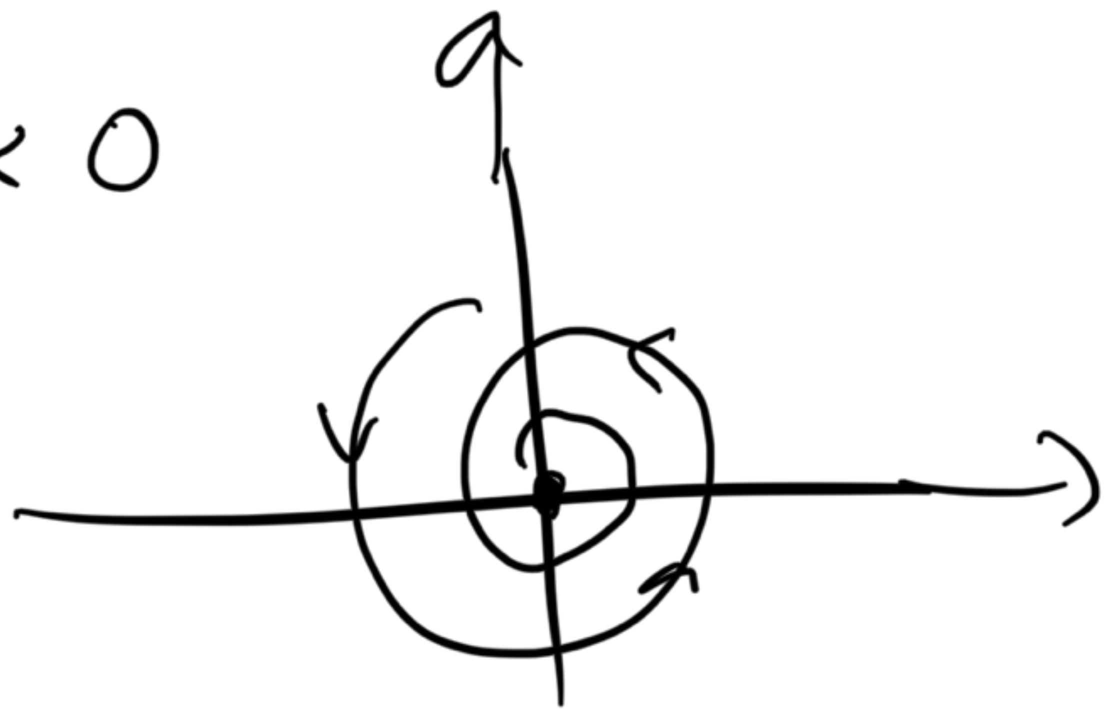


$(0,0)$ är <u>instabil</u> (sadelpunkt)

Komplexa egenvärden $\lambda = \alpha \pm i\beta$

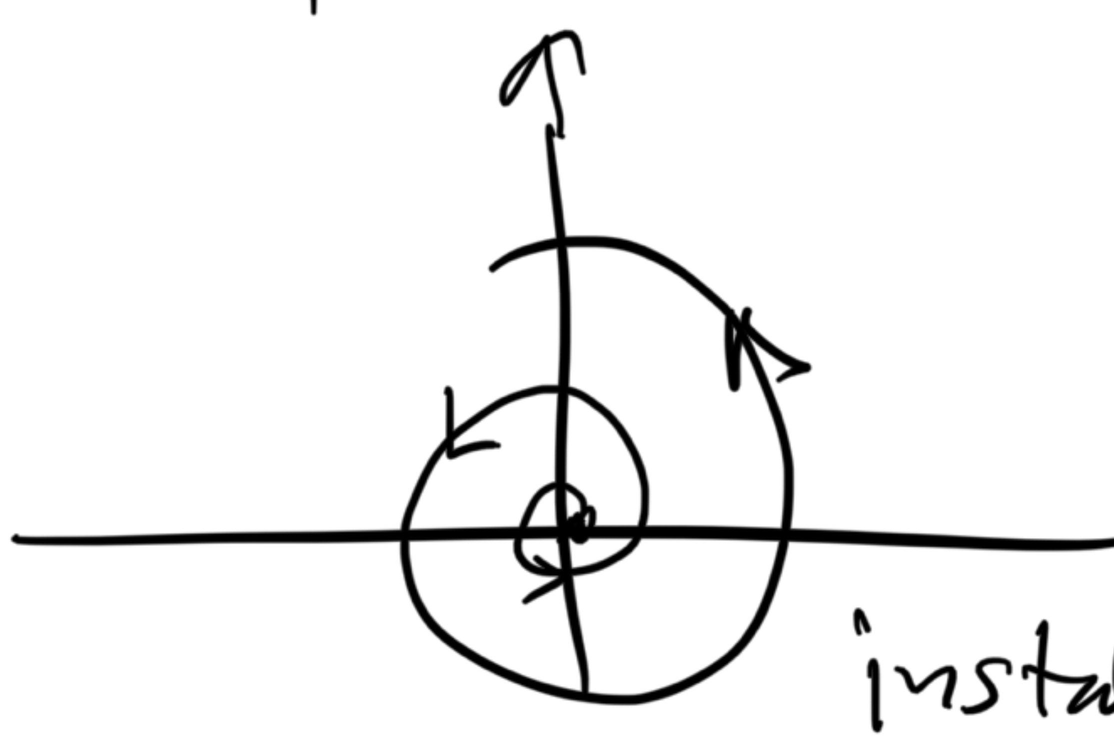
(Anm: $\det(A) \neq 0$ $\Rightarrow \lambda \neq 0$.)

$\alpha < 0$



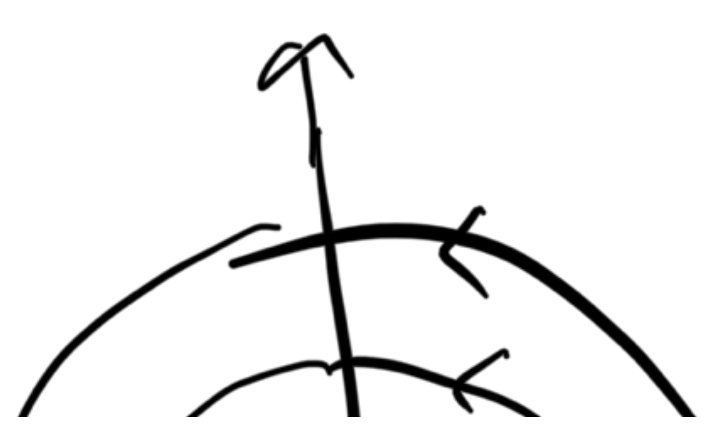
<u>Stabil</u> spiralpunkt

$\alpha > 0$

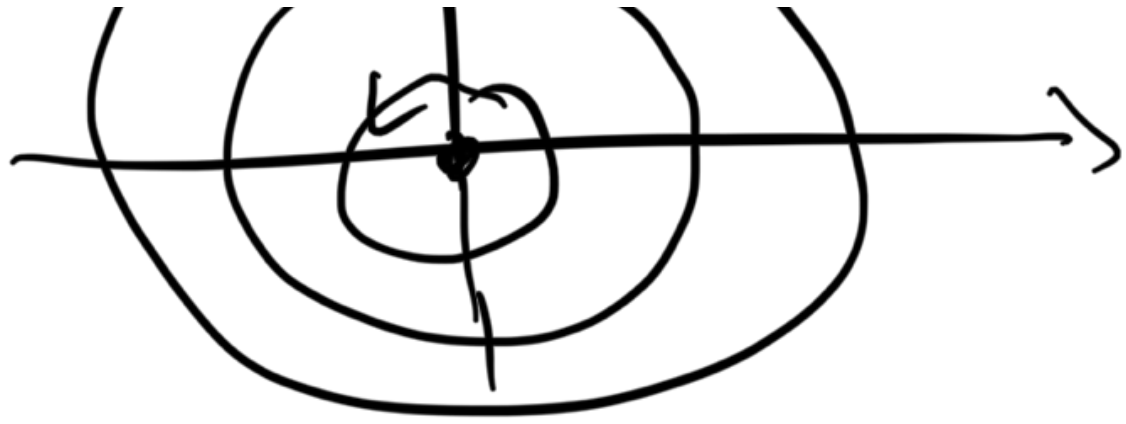


instabil spiralpunkt.

$\alpha = 0$ (men $\beta \neq 0$)



$(0,0)$ är stabil,



Kallas för **center**.

Krit. punkt: $\bar{v}(\bar{x}) = (0,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

Svar på frågan!

$$\Updownarrow$$

$$A\bar{x} = \cancel{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Ekv. system: $A\bar{x} = \bar{0}$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ inverterbar

$\Rightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{0}$ enda **lösningen**.

Stabilitetstest: Anta att $\det(A) \neq 0$.
(för linj. system).

1) Om alla A's egenvärden strikt ~~negativ~~ har negativ realdel, så är $(0,0)$ asymptotiskt stabil.

(dvs $\bar{x}(t) \to (0,0)$ då $t \to +\infty$.)

2) Om A's egenvärden är rent imaginära så är lösningarna $\bar{x}(t)$ periodiska.

(och $(0,0)$ är stabil.)

3) Alla andra fall: $(0,0)$ instabil.

Linjärisering & Stabilitet (kap 10.3)

Betrakta ett autonomt system

$$(*) \quad \bar{x}'(t) = \bar{v}(\bar{x}(t))$$; antag

att $\bar{x}_1$ är en kritisk punkt

(dvs $\bar{v}(\bar{x}_1) = \bar{0}$.)

Def: $\bar{x}_1$ är stabil om det

för varje $\rho > 0$ finns ett $r > 0$

s.a. om punkten $\bar{x}_0$ ligger

r-nära $\bar{x}_1$, dvs $|\bar{x}_0 - \bar{x}_1| < r$

och $\bar{x}(t)$ är lösning till

$(*)$ med B.V. $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$,

så gäller att:

$$|\bar{x}(t) - \bar{x}_1| < \rho \text{ för alla } t > 0.$$

"Håller oss nära om vi börjar nära".

Om även $\bar{x}(t) \to \bar{x}_1$ så är

$\bar{x}_1$ asymptotiskt stabil.

["Kritiska punkter "suger in" alla närliggande punkter"]

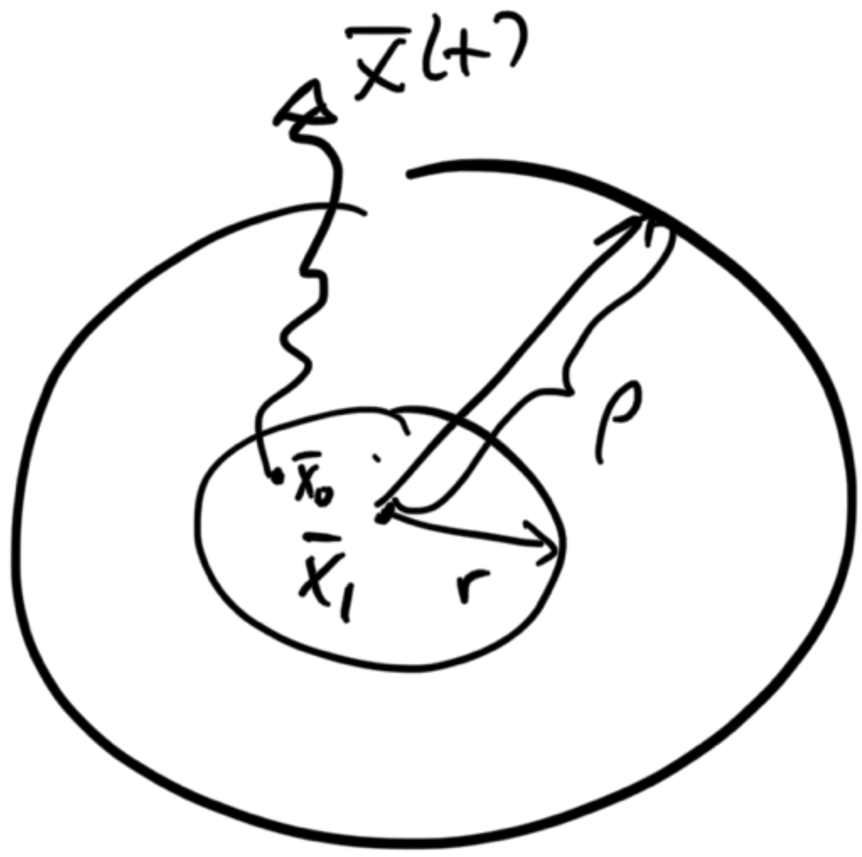
__Def__: $\bar{x}_1$ är __instabil__ om det ett $\rho > 0$ så att för __varje__ $r > 0$ kan vi hitta ~~en~~ "busig" startpunkt $\bar{x}_0$ så att

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| < r$ och lösningen

$\bar{x}(t)$ som uppfyller $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ uppfyller också

$|\bar{x}(t) - \bar{x}_1| > \rho$ för något

$|\bar{x}(t) - \bar{x}_1| > \rho$ för något $t > 0$.



Vissa lösningar "sticker iväg" oavsett hur nära $\bar{x}_1$ vi börjar.

Stabilt: "lydigt barn"

Instabilt: "busigt barn".

Ex (rep.): I polära koordinater såg vi att systemet

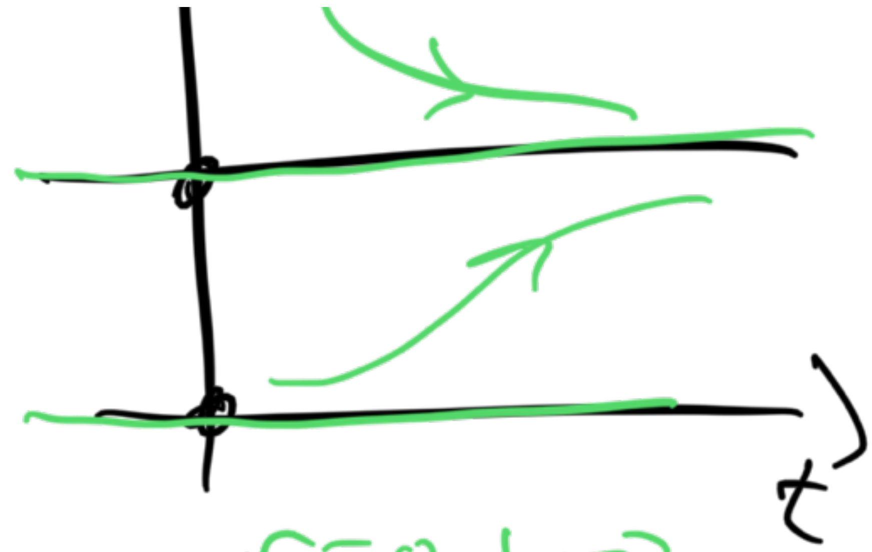
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(1-x^2-y^2) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$$

blev på formen:

$d\theta =$ … $r\uparrow$

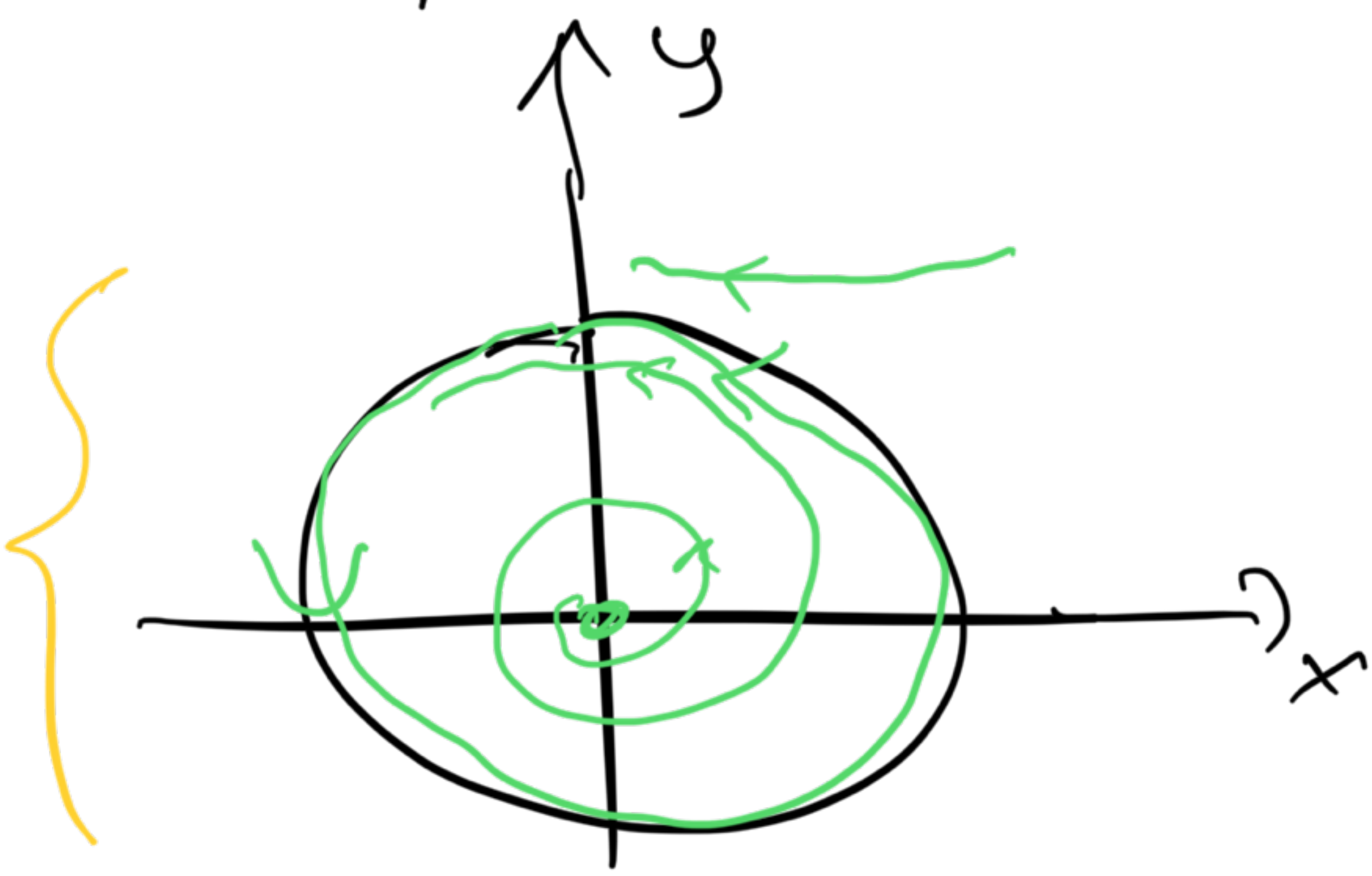
$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} = r(1-r^2). \end{cases}$$

$(r \geq 0)$.



$r = 0, 1 \rightarrow$ krit. pkter.

Fasporträtt



$(0,0)$ är instabil.

Stabilitetstest

Givet system

$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$$

, antag att (x_1, y_1) är en kritisk punkt. (Dvs $P(x_1,y_1) = Q(x_1,y_1) = 0$)

Taylorutveckla nu kring (x_1, y_1):

$$x' = P(x_1,y_1) + \frac{\partial P}{\partial x}(x-x_1) + \frac{\partial P}{\partial y}(y-y_1)$$

$+ O(|x-x_1|^2 + |y-y_1|^2)$

$$y' = Q(x,y) \simeq \frac{\partial Q}{\partial x}(x-x_1) + \frac{\partial Q}{\partial x}(y-y_1)$$

<u>linjärt</u> system!

$$\text{Låt } J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

"Jacobi-matrix".

(Sats)

<u>Faktum</u>: (1) Om <u>alla</u> egenvärden till $J(x_1, y_1)$

krit. pkt.

har strikt negativ realdel, så är $\bar{x}_1 = (x_1, y_1)$ <u>asymptotiskt</u> stabil.

(2) Om minst ett egenvärde har strikt positiv realdel, så är $\bar{x}_1$ instabil

Ex: Ovan hade vi systemet

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1-x^2-y^2) = -y + x - x^3 - xy^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(1-x^2-y^2) = x + y - x^2y - y^3.$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ är kritisk punkt!

Vi har

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = (\text{? : övning})$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3x^2-y^2 & -1-2xy \\ 1-2xy & 1-x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sök egenvärden:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} = (\ \ )^2 + 1 =$$

$$0 = \begin{vmatrix} & \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. realdel}}}{1} \pm i .$$

$\therefore$ $(0,0)$ är $\underline{\underline{\text{instabil}}}$.

<u>Ex</u>: Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = -y & (= P(x,y)) \\ y' = x^3 . & (= Q(x,y)) \end{cases}$$

Ser att $(0,0)$ är <u>ende</u> kritiska punkten.

Är $(0,0)$ stabil / instabil?

Vi har: $J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$

och $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ & \end{pmatrix}$ så ...

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, som

har egenvärdet $\lambda = 0$
(dubbel rot!).

$\lambda = 0$ är varken < 0 eller > 0
så vårt test funkar inte!?

Metod: titta på banorna!
(y som funktion av x).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

$$= \frac{-x^3}{y} \quad \text{(separabel!)}$$

$$\Rightarrow \quad y\,dy = (-x^3)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y^2/2 = -\frac{x^4}{4} + C_0.$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 + x^4 = 4C_0 = C$$

Hur ser dessa ut?

Tag $\varepsilon > 0$, hitta lösning

som uppfyller $y(0) = \varepsilon$

$\Rightarrow C = 2\varepsilon^2$ och kurvan

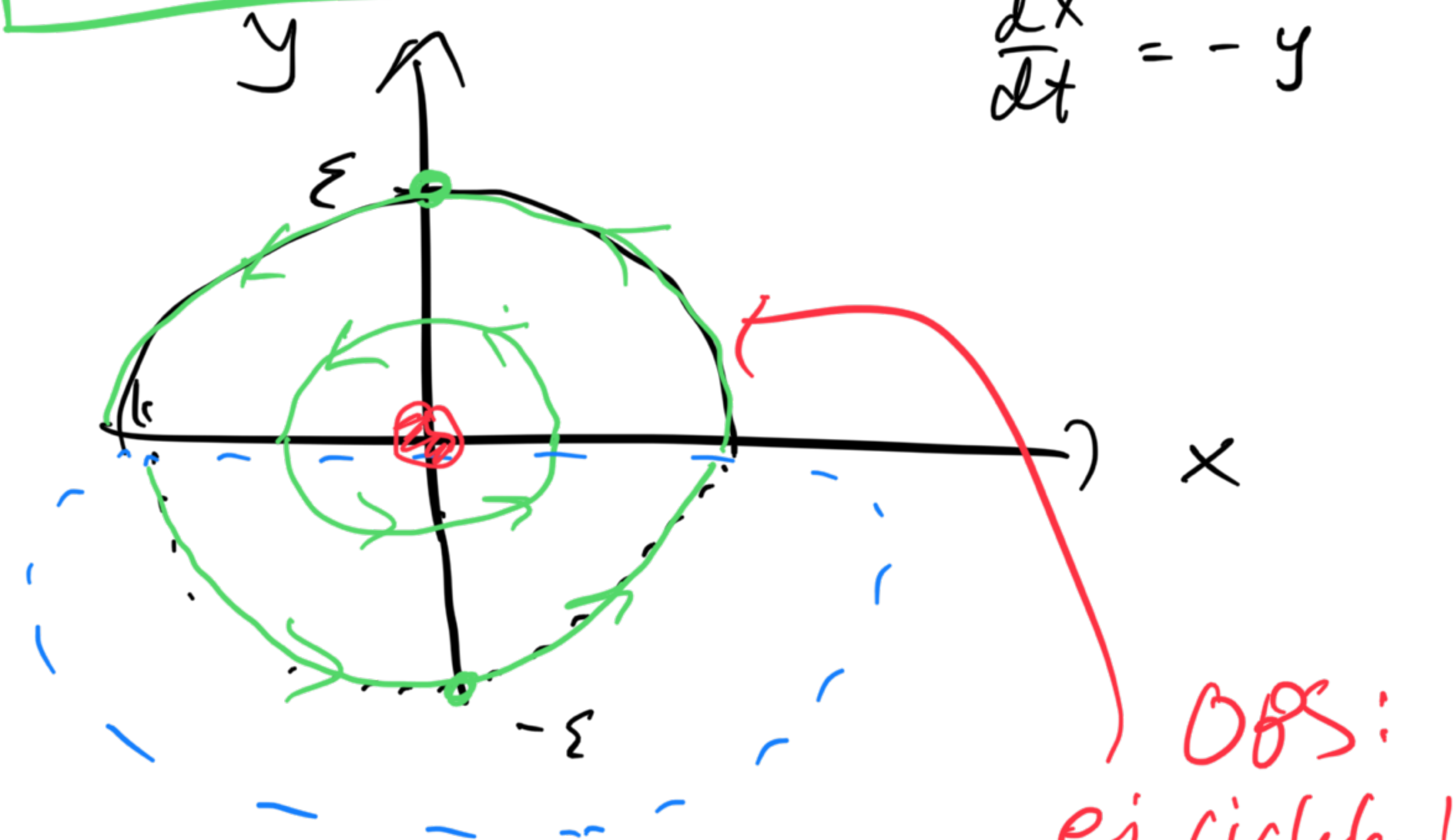
blir då: $2y^2 + x^4 = 2\varepsilon^2$

$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - x^4/2}$ (sig +)

$\therefore$ Lösningen ligger på kurvan

$$\boxed{y = \sqrt{\varepsilon^2 - x^4/2}} = y(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = -y$$



Lösningarna ligger på

kurvorna $2y^2 + x^4 = 2\varepsilon^2$

$\therefore$ (0,0) stabil

$y < 0$!?

do: $y(0) = -\varepsilon$,