SF1633, #10

(Autonoma system, Kap 10.1)

$$(*)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}$$

Autonomt: P, Q beror <u>EJ</u> på t.

⌈Jfr: Autonomt i 1d:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y).$$ ⌋

<u>Ex</u>: Skriv $x'' + \sin(x) = 0$ som <u>system</u>. (Av ordning 1.)

Lösn: Låt $y = x'$. Då får vi:

$$x' = y \qquad (\Rightarrow P(x,y) = y)$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (x')' = x'' = \underbrace{-\sin x}_{Q(x,y)}. \end{cases}$$

Kompakt notation: Skriv

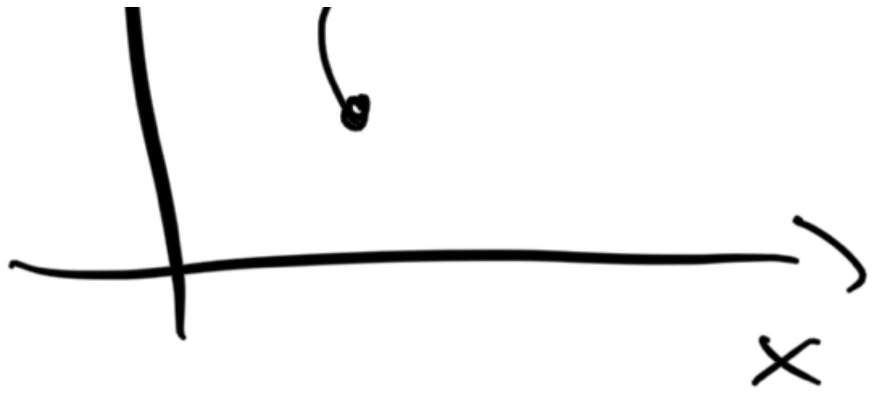
$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{v}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}.$$ Då kan

(*) skrivas som:

$$\bar{x}'(t) = \bar{v}(\underbrace{\bar{x}}_{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}(t)).$$

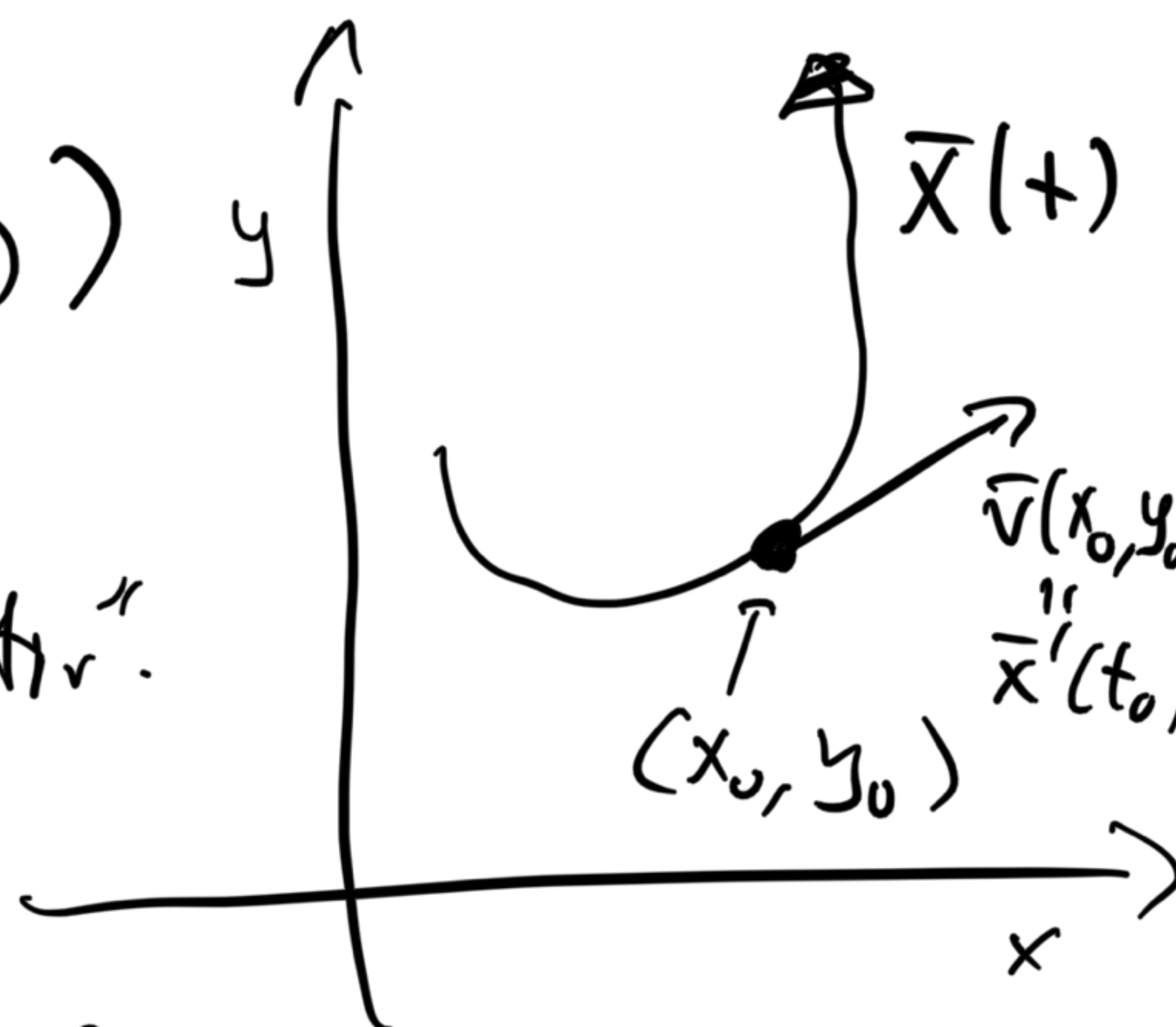
Anm: En lösning till (*) kallas en <u>bana</u>.



Notera: $\bar{v}$ är ett vektorfält

$$\bar{x}' = \bar{v}(\bar{x}(t))$$

"hastighetsvektor".



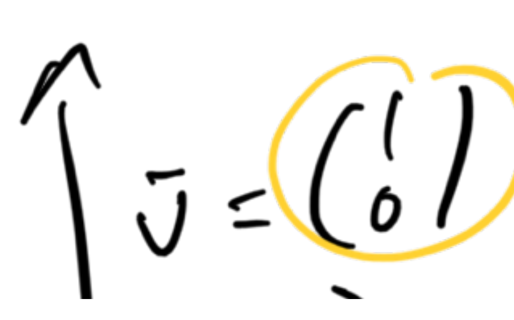
B.V.: $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$.

Ex: Antag att $\bar{v}(x,y) = (y, -x)$

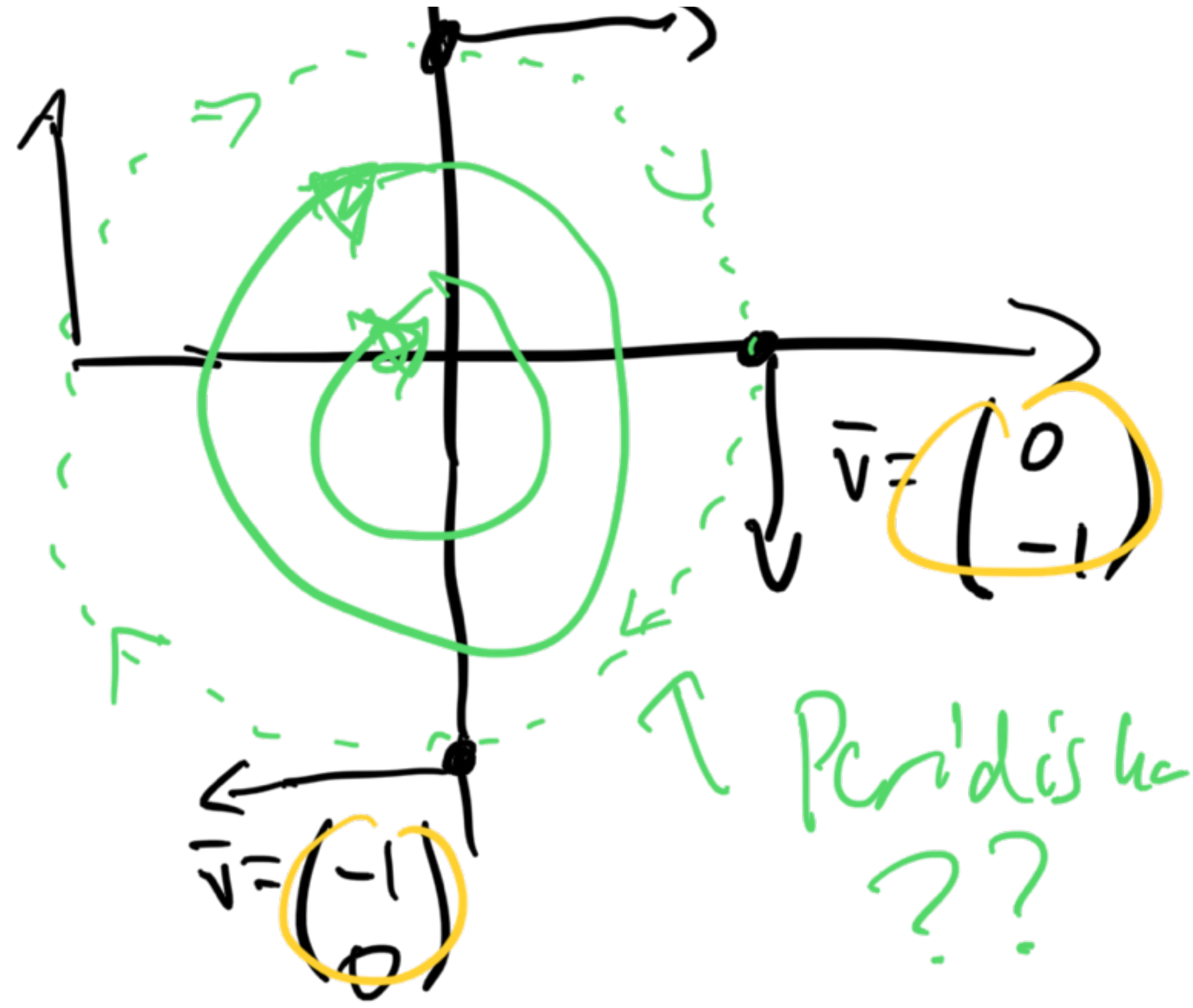
Undersök om systemet $\bar{x}'(t) = \bar{v}(\bar{x}(t))$ har periodiska banor.

Lösn: Vi har det linjära systemet

$\Big\{ \frac{dx}{\ } = y$



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$



Har sett (se F#7)

att allmän lösning ges av:

$$\bar{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Samtliga lösningar är 2π-periodiska! ∴ Banorna är periodiska!

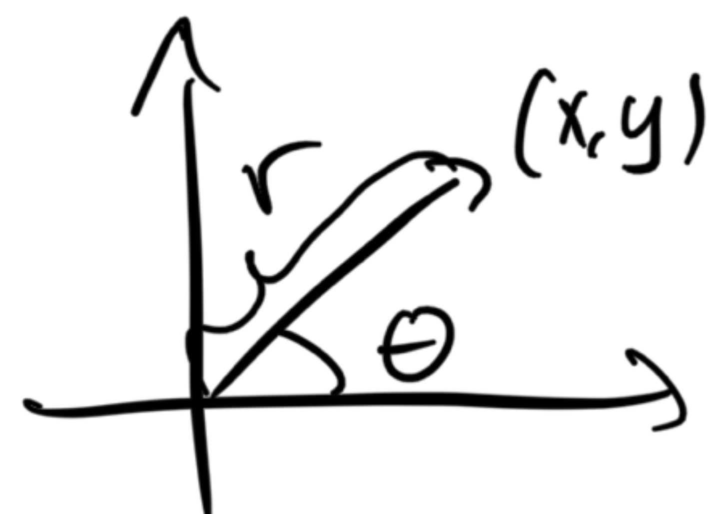
Ja, alla banor är periodiska!

I allmänhet <u>omöjligt</u> att hitta <u>explicita</u> lösningar till (*) om systemet är icke linjärt (

lösningar (kaos etc dyker upp.)

Ibland kan fiffigt variabelbyte hjälpa! T.ex. polära koord.

$$\begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$



Derivering m.a.p. t, och insättning av info från (*) ger:

$$\cancel{2} r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$= \cancel{2}x\,P(x,y) + \cancel{2}y\,Q(x,y)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1\cdot x^2}{x^2\left(1+(y/x)^2\right)}\cdot\left(\frac{y'}{x} - \frac{y x'}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x y' - y x'\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(x\cdot Q(x,y) - y\cdot P(x,y)\right)$$

r ($\approx \frac{d\theta}{dt}$ ...

Ex: I tidigare exempel hade vi $P(x,y) = y$ & $Q(x,y) = -x$. Vi får då:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x \cdot P(x,y) + y\,Q(x,y)\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(x \cdot y + y \cdot (-x)\right) = 0$$

$\therefore \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r$ konstant!

Och: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x \cdot (-x) - y \cdot y\right) = \frac{1}{r^2} \cdot (-r^2)$
$$= -1$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r(t) = c_1 \\ \theta(t) = -t + c_2 \end{array}$$

Ex (mer komplicerat): Betrakta systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

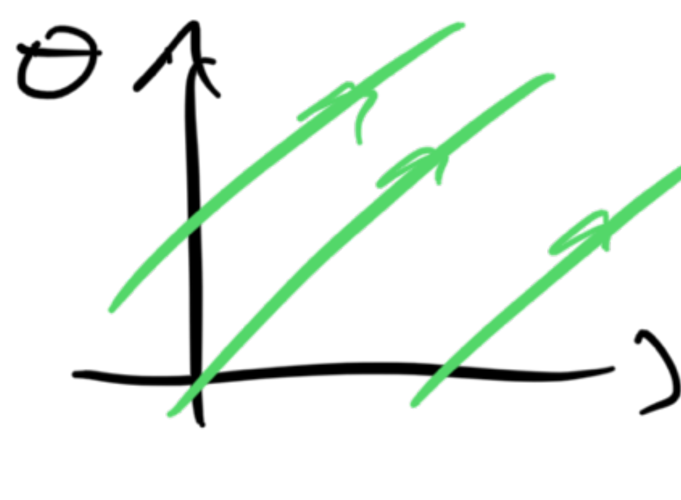
dt

Övning: i polära koordinater får vi:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1 \\ \frac{dr}{dt} = r(1-r^2) \end{cases}$$

Titta på riktningsfält för båda 1d ekvationerna:

(1) $\frac{d\theta}{dt} = 1 > 0$



(2) $\frac{dr}{dt} = r(1-r^2)$

$(r \geq 0)$.

Stationära punkter: $\frac{dr}{dt} = 0 \iff r = 0$ eller $r = 1$

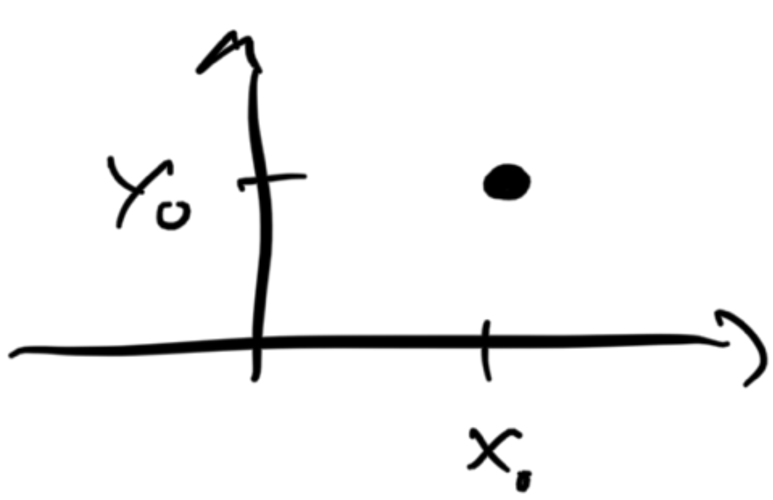
$\frac{dr}{dt} > 0$ om $r \in (0,1)$

$\frac{dr}{dt} < 0$ om $r > 1$.

Obs: banor utanför "Kommer

... aldrig fram till enhetscirkeln. (Samma för banor innanför).

Anta att (x_0, y_0) är en punkt då $\bar{v}(x_0, y_0) = (0,0)$. Då gäller att $\bar{x}(t) = (x_0, y_0)$ $(\forall t)$ en lösning, ty $\bar{x}'(t) = \bar{0}$ och $\bar{v}(\bar{x}(t)) = \bar{0}$.

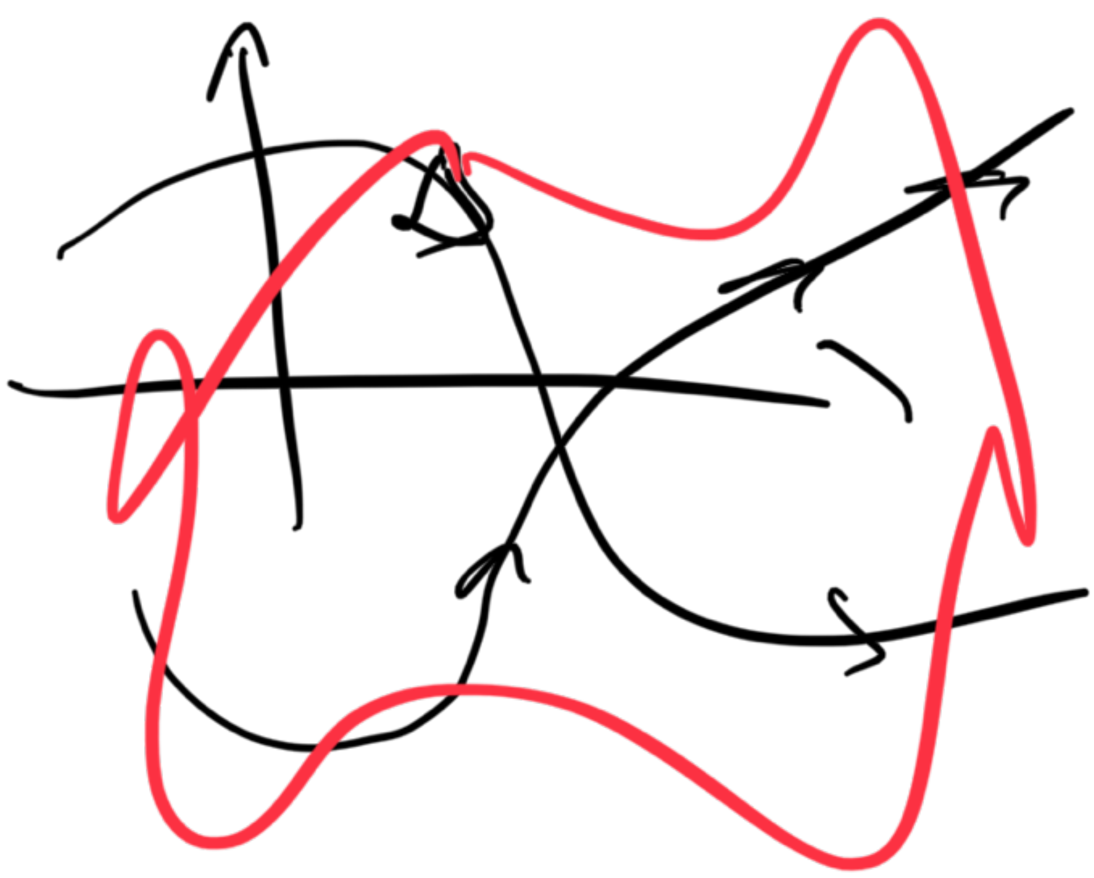


"banan fastnar i en punkt!"

Dessa punkter kallas <u>kritiska</u> eller <u>stationära</u> punkter.

Säger att den konstanta lösningen $\bar{x}(t) = (x_0, y_0)$ $(\forall t)$ är en elevilibrium lösning.

Fakta: Om P, Q är C^1-funktioner, så kan två olika banor **aldrig** korsa varandra!



Förbjudet om P, Q är C^1!

Några möjligheter:

* kritisk punkt!

Ex: Finn kritiska punkter

till systemet :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1-y^2 \\ \frac{dy}{dt} = x+2y \end{cases}$$

Lösning: vi hitta alla x, y så att båda HL $= 0$. (dvs $\begin{cases} 1-y^2=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$)

$1-y^2=0 \implies y=\pm 1.$

- $y=1$ & $x+2y=0 \implies x=-2y=-2$
- $y=-1$ & $x+2y=0 \implies x=-2y=2$

$\therefore$ $(x,y) = (-2,1)$ och

$(x,y) = (2,-1)$ är

de kritiska punkterna.

Stabilitet hos linj. system (Kap 10.2)

Allmänt problem: antag att $\overline{x_0}$ är en kritisk punkt. Är $\bar{x}_0$ stabil?

a) 

$\bar{x}_0$

(Anm: a) sägs vara asymptotiskt stabil.)

b) 

"stannar nära".

c) 

x_0

instabil, lösning kan sticka!

a) & b) sägs vara **lokalt** stabila

c) är instabilt.

Ex: Studera det **linjära** systemet

$$(**)\quad \begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy. \end{cases}$$

Kort: $\bar{x}' = A\bar{x}$ om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

och $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Anta att $\det(A) \neq 0$. Sök krit. punkter: dvs x, y ger lösning

$x' = ax + by = 0$

$y' = cx + dy = 0$ (alt: $A\bar{x} = \bar{0}$)

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ bara ~~x,y~~ $x = y = 0$ ger lösning.

$\therefore$ Bara origo är kritisk punkt.

Ex: Betrakta

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}$$

Vet: lösning ges av

$$\bar{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}$$

$$\left(A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix} \quad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \right)$$

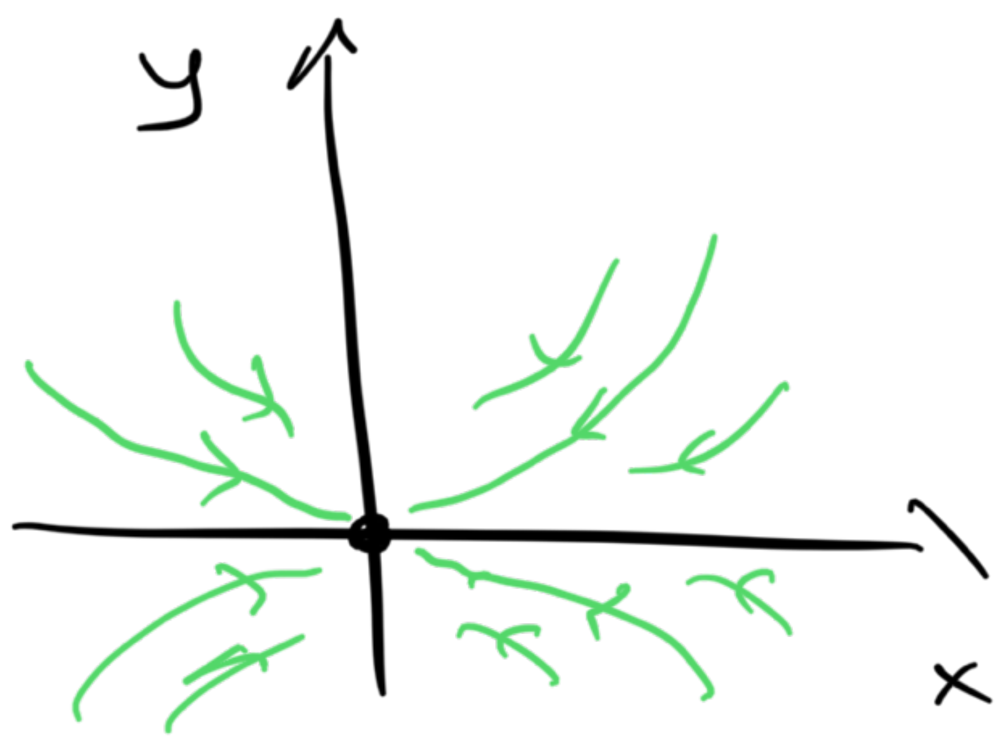
BV.

Oavsett $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ser vi att

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cdot e^{-t} \\ y_0 \cdot e^{-2t} \end{pmatrix}$$ är

lösning. Notera: Om $t \to \infty$ ser vi att e^{-t} & $e^{-2t} \to 0$

$\therefore \ \bar{x}(t) \to \bar{0}$ då $t \to \infty$.



$\therefore$ Origo är stabilt. ("stabil nod".)

<u>Ex</u>: $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\bar{x}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

Notera: $(c_1, c_2) \neq (0,0) \Rightarrow$

$|\bar{x}(t)| \to \infty$. (då $t \to \infty$).

Origo är instabil. ("Instabil nod")

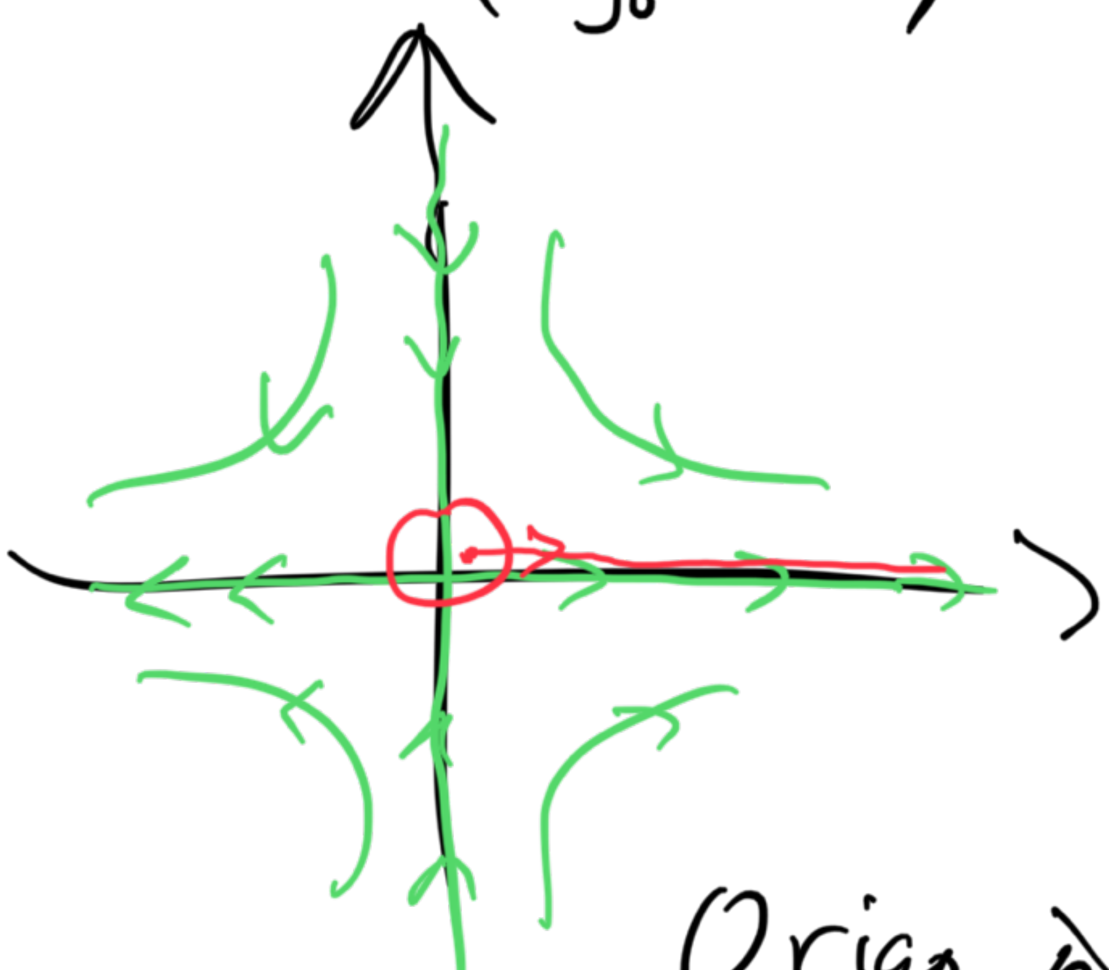
Ex: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$
$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \bar{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cdot e^{t} \\ y_0 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$.



Trots att vi börja mycket nära origo sticker banan iväg.

Origo är instabil.

Vi har en sadelpunkt.

Har sett: bara negativa (strikt) egenvärden $\Rightarrow$ stabilt.

minst ett positivt egenvärde $\Rightarrow$ instabilt.

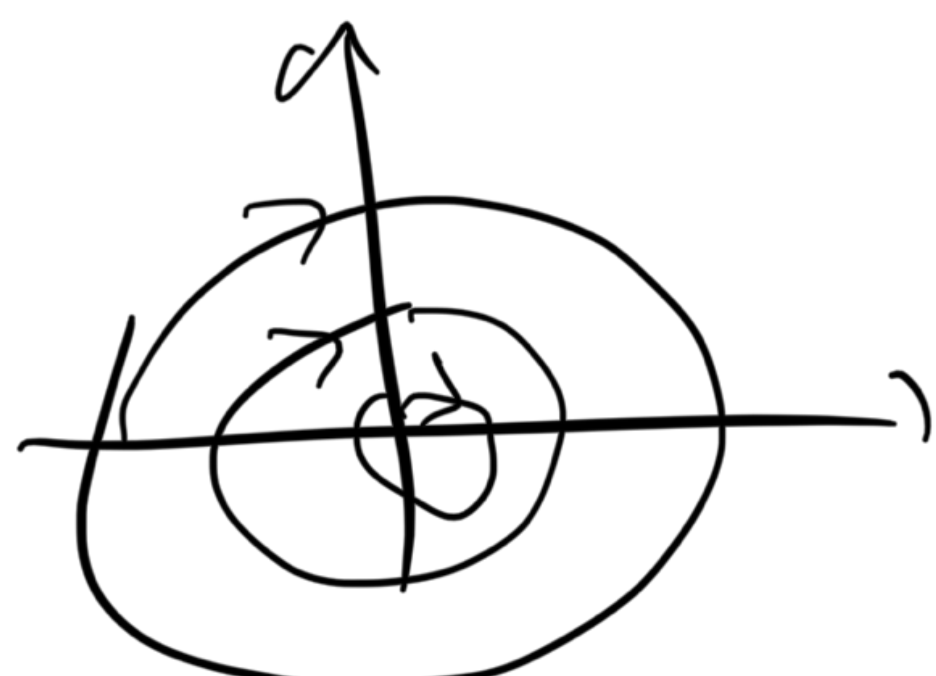
(Blandade tecken: Sadelpunkt, instabil.).

Antag att A har komplexa egenvärden: $\lambda_1 = \alpha + ib$

$\lambda_2 = \alpha - ib$.

realdelen viktig!

Om $\alpha = 0$:

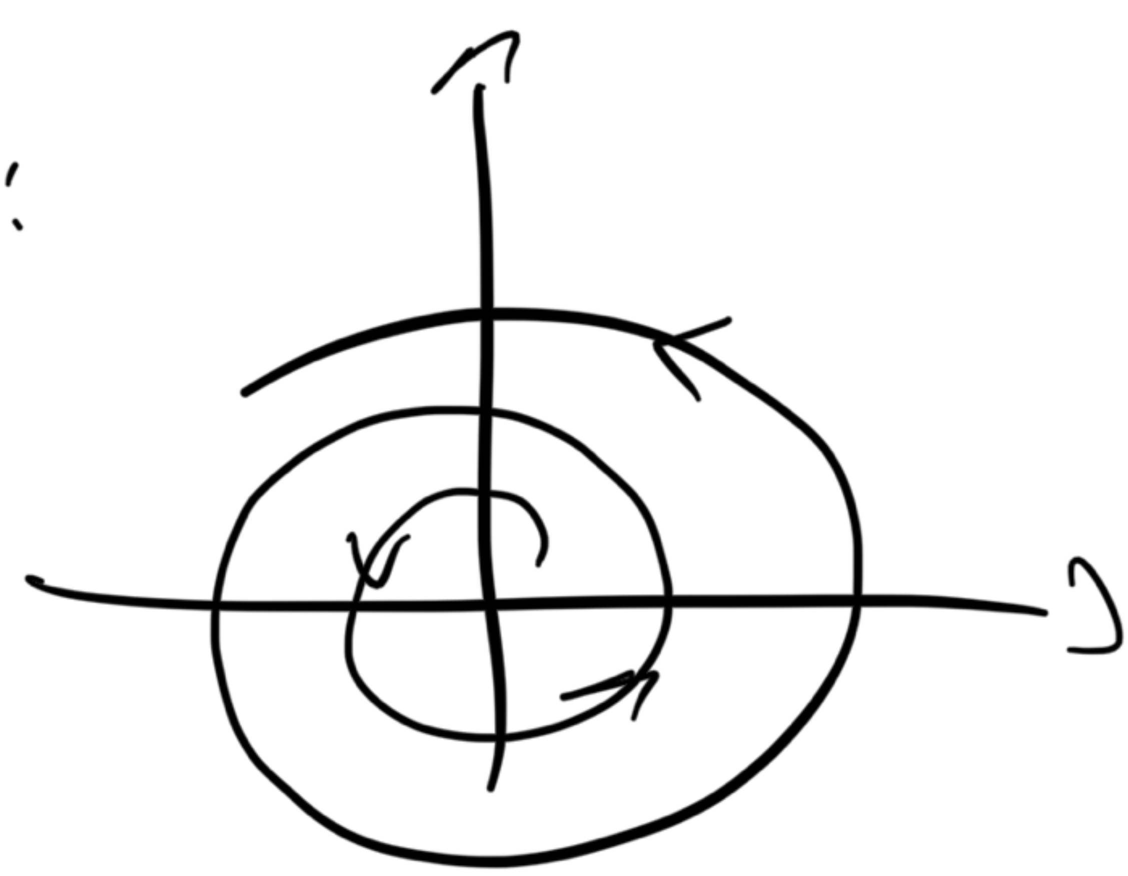


har ett "centrum". (stabil)

Om $\alpha > 0$:

$e^{\alpha t} \to \infty$

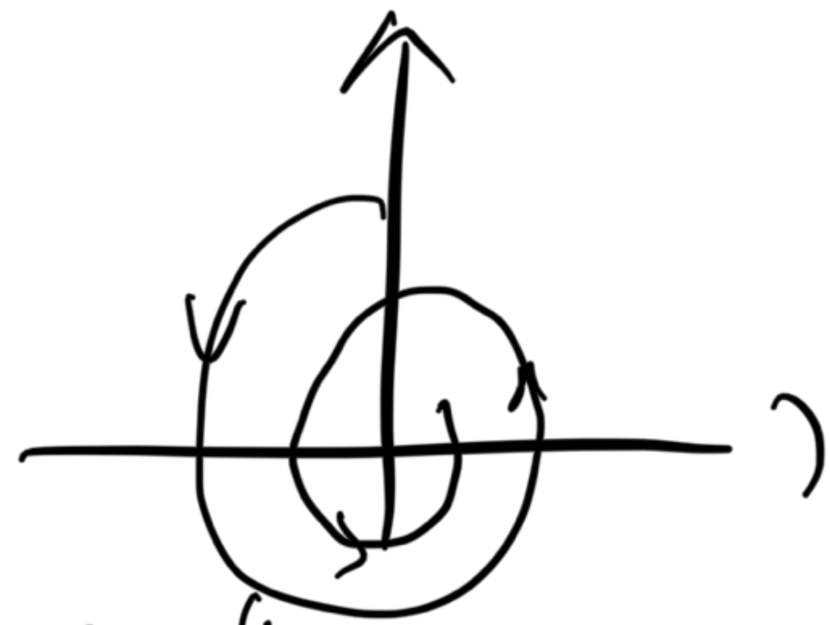
så instabil



"instabil spiralpunkt"

instabil spiralpunkt.

Om $\alpha < 0$:



"stabil spiralpunkt".

Anm: Allt detta sammanfattas bra av Sats