SF1633, ht20, frl #1.

Hemsida: Canvas.

Bok: Zill, 9e. (se)

Upplägg:

- Frl: teorigenomgång, ideér, enkla belysande exempel. (Detaljer i boken).

- Övningar: olika LÄS!

Zoom grupper, fritt vilken.

Ställ frågor!!

Examination:

tenta! (+ bonus).

Bonus: dator rättade uppgifter ger ≤ 10% bonus. (+på tenta resultatet.)

Kontouppgifter mailas ut nästa vecka.

Tjat!! registrera er!

"Pep talk": jobba kontinuerligt. (högt tempo).

- läs bok innan FRL.
- läs teori, gör motsv. exempel. (tänk på vad du räknar på!)
- Jobba själv – kör fast!
- Kolla svar rimligt?

Repetera

- lin. alg.
- envarre.

· derivera!

· Klurig kurs, ser lite ut om någon annan vikarar.

Varför är differential-ekvationer (diff. ekv. eller bara <u>DE</u>) viktiga?

Modell av verklighet ⇝ DE. (Ofta!).

<u>Ex</u>: * vädret
* kemiska reaktioner
* biologi (ekologi, cell bio etc.)
* Sjukdomsspridning (Corona !?).

F1 (kap 1.1 – 1.3)

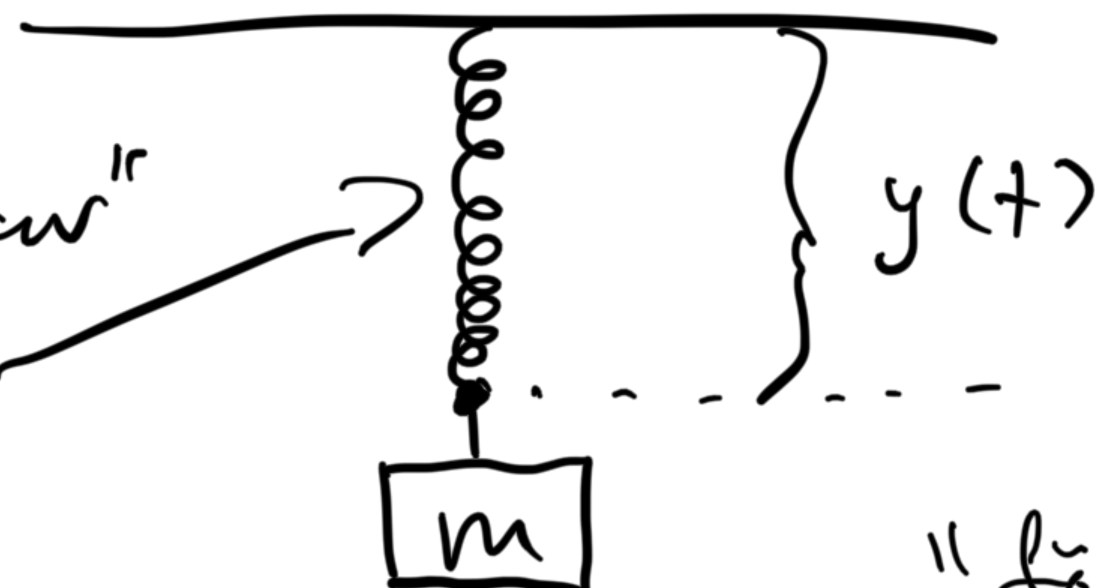
Vem sa: "Det är användbart att lösa diff. ekv." ?

att lösa diff. ekv. :

Newton

Ex på modeller

1



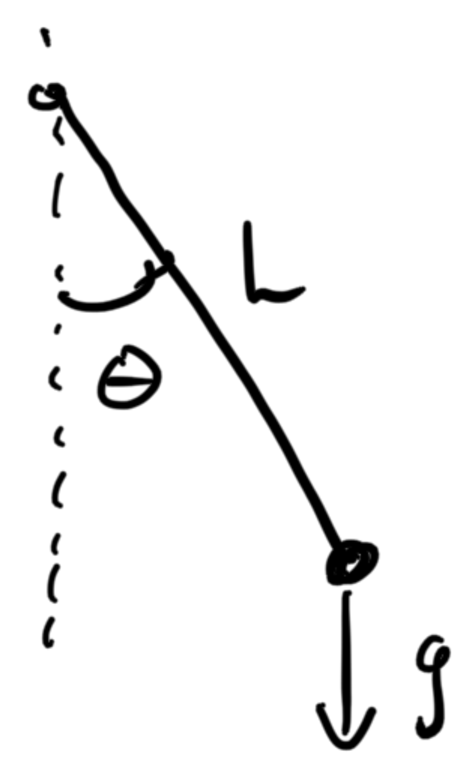
"det existerar" $\Rightarrow \exists t$

"för alla" $\Rightarrow \forall t$

$$\text{D.E.: } m y''(t) + k \cdot y(t) = 0 \quad \underline{\forall t}$$

massa   fjäderkonstant

2

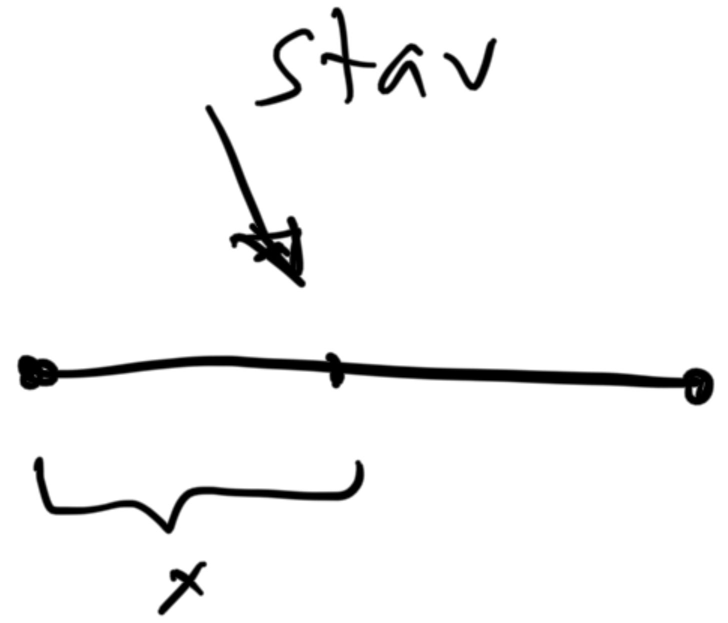


$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0$$

Pendel: L = längd, g = grav.

konst.

③ Temperatur $u(x,t)$



$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

"värmeledning".

Diff. ekv.

<u>Ex</u>

$\underline{(*)}$ $$\underline{\frac{dy}{dt} = y} \qquad y = y(t)$$

är en D.E.

- t : <u>oberoende</u> variabel
- y : <u>beroende</u> variabel.

Kort, mer kompakt, notation för $(*)$: $\underline{y' = y}$.

<u>Ordning</u> av en D.E. :

ordningen på den högsta derivatan i ekvationen.

Ex: $y' = y$: ordning 1

$y'' = 3y$: ordning 2.

Lösning till en D.E. (vad menas?)

Ex: betrakta $(*)$ dvs

$$\frac{dy}{dt} = y.$$

En funktion ϕ, definierad på något interval I, så att ϕ & ϕ' är kontinuerliga på I och som uppfyller $(*)$ (dvs: $\phi'(t) = \phi(t)$ för alla $t \in I$) sägs vara en lösning till $(*)$.

ordning $= 1$

existens interval.

Anm: Låt $\phi(t) = e^t$. Då är

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t, \text{ dvs}$$

$$\phi'(t) = \phi(t). \quad \therefore \quad y = y(t) = e^t$$

"alltså"

är en lösning till $(*)$.

$I = $!? Kan ta $I = (-\infty, \infty)$.

Anm: Även $y = c \cdot e^t$ är en lösning till $(*)$, för varje val av konstant C.

Miniövning: Kolla!

Anm: Kan ofta kolla lösning till D.E. utan derivering (lätt!)

Ex: Betrakta $y' + y^2 = 0$

Då är $y = y(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$ en lösning. Anm: $y^1 = \{ y^1, y' \}$

(Dvs: $I = (0, \infty)$.)

Koll: $y(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow y'(t) = \frac{-1}{t^2}$

och $y^2 = (y(t))^2 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{t^2}$

$\therefore\ y' + y^2 = \frac{-1}{t^2} + \frac{1}{t^2} = 0 \quad (\forall t > 0)$

Linjära ekvationer:

D.E. på formen

$*\ a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = g(x)$

ordning 1.

$$\boxed{*\ a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = g(x)}$$

ordning

a_2: $a_2(x)$ är någon funktion (känd) av x.

$a_1(x)$

2.

Ex: $\underbrace{\cos(x)}_{a_2(x)} \cdot y''(x) + \sin(x)\, y'(x) + \underbrace{x}_{a_0(x)} \cdot y(x) = \underbrace{\ln x}_{g}.$

Ex: $\frac{dy}{dx} = y$ är linjär (av ordning 1)

Ty: kan skriva om som $y' - y = 0 = 1 \cdot y' + (-1) \cdot y$

$[\, a_1(x) = 1, \quad a_0(x) = -1, \quad g(x) = 0 \,]$

Ex: $\ln(y'(x)) + y(x) = 0$

ej linjär.

Fråga: $y' + y^2 = 0$. Linjär?

$(y)^2$ ej linjär!

$y' = \{ y^1, y' \}$

$y' + y^1 = 0$

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

Ex: Betrakta lösning till

$y' = y \quad (*)$, som uppfyller

$\underbrace{y(0) = 2}_{\text{begynnelsevillkor}}$. [Anm: $y'(t) = y(t)$
"t = tid"]

Har sett $y(t) = C \cdot e^t$ är en lösning till $(*)$, för varje val av konstant C.

Hitta C så att $y(0) = 2$, dvs vill att

$$y(0) = C \cdot e^0 = 2 \quad [e^0 = 1]$$

$$\Longrightarrow C \cdot 1 = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$\therefore$ $y(t) = 2 \cdot e^t$ är en lösning till BVP.

Finns några andra lösningar?

Nej!

"Flakt exempel": / Betrakta ~~uppfyller~~ ~~lj~~ antagande i sekt.

BVP $\frac{dy}{dx} = x \cdot \sqrt{y}$, $y(0) = 0$.

1. $y(x) = 0$ (för alla x)

   är en lösning!

Koll: $VL = \frac{dy}{dx} = 0$

$HL = x \cdot \sqrt{y(x)} = x \cdot \sqrt{0} = 0$

$\therefore VL = HL \ \forall x$. $\therefore y(x) = 0$ är lösning!

2. $y(x) = \frac{x^4}{16}$ uppfyller

   också BVP!

$\boxed{y' = x \cdot \sqrt{y}}$

Koll:

$VL = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{16}\right) = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$

$HL = x \cdot \sqrt{\frac{x^4}{16}} = x \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$.

$\therefore VL = HL \ \forall x$.

$\therefore$ även $x^4/16$ är lösning.

Kan hända att lösning

ej unik!

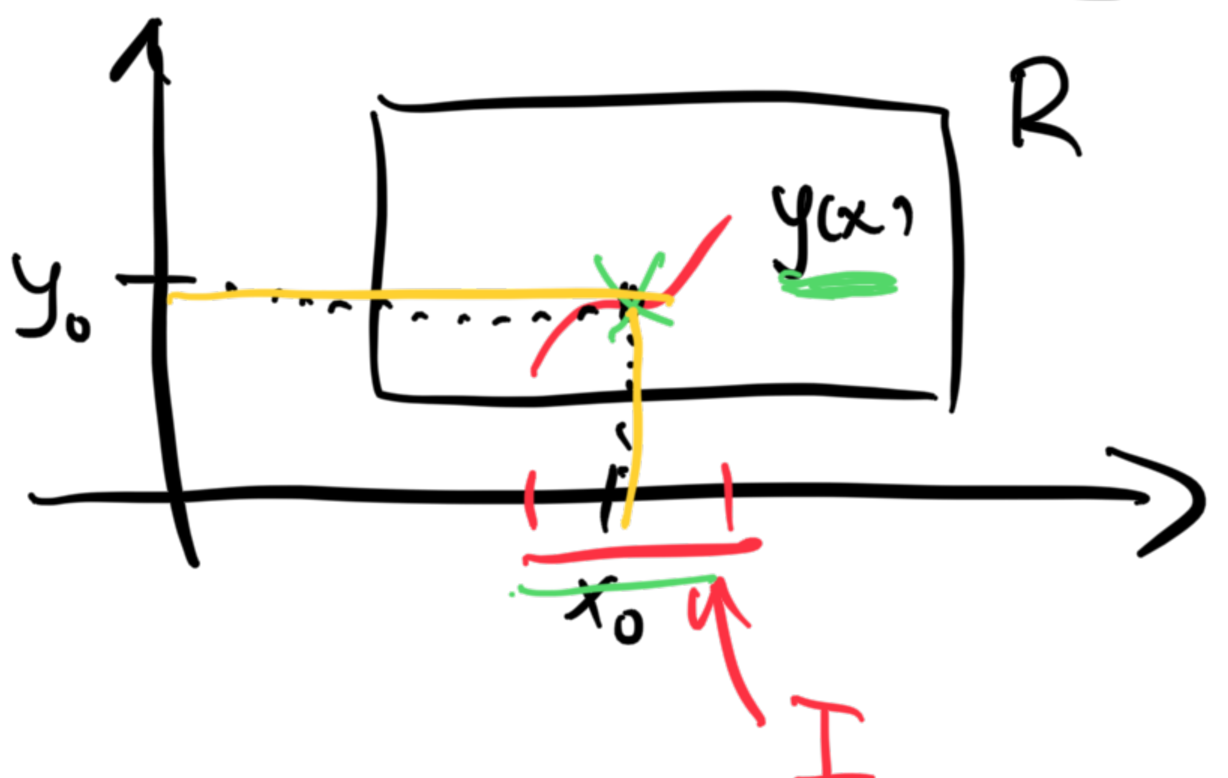
När är vi garanterade en unik lösning?

Sats (existens & entydighet):

Betrakta D.E.

$$(**)\quad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad \underline{y(x_0) = y_0} \quad \text{B.V.}$$

$\ulcorner$ Ex: om $f(x,y) = y$, så får vi $(*)$, dvs $\frac{dy}{dx} = y$. $\lrcorner$



<u>Antag</u> att f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerlig på R. Då finns ett intervall I och en <u>unik</u> funktion $y(x)$ som är lösning till $(**)$, på I.

$\ulcorner$ Ex: $\quad f(x,y) = x^2 y^3$

Ex. $f(x,y) = x^2 \cdot y^3$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(3 \cdot y^2)$
$= 3x^2y^2$.

(påminnelse om skillnad på $\frac{\partial f}{\partial x}$ & $\frac{\partial f}{\partial y}$; jfr flervarren.)