

Matematiska Institutionen, KTH

**Kontrollskrivning SF1633, Differentialekvationer I, den 27 september 2017 kl 08.00-10.00.**

**Examinator:** Pär Kurlberg

**OBS:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Lös begynnelseproblemet

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3 e^{4x}, \quad y(1) = 0$$

och ange det största intervall där lösningen är definierad.

2. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 4y \end{aligned} \tag{1}$$

- (2p) Bestäm en fundamental lösningsmängd till (1).
  - (2p) Finn en fundamentalmatris  $\Phi(t)$  och uttryck den allmänna lösningen till (1) med hjälp av  $\Phi(t)$ .
3. (4p) Använd variation av parametrar för att ange den allmänna lösningen till den icke-homogena differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 4y = -4e^{-2t}.$$

## Brief Table of Integrals

1.  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2.  $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$
3.  $\int e^u du = e^u + C$
4.  $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$
5.  $\int \sin u du = -\cos u + C$
6.  $\int \cos u du = \sin u + C$
7.  $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
8.  $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
9.  $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
10.  $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
11.  $\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$
12.  $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$
13.  $\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
14.  $\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
15.  $\int u \sin u du = \sin u - u \cos u + C$
16.  $\int u \cos u du = \cos u + u \sin u + C$
17.  $\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$
18.  $\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$
19.  $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
20.  $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
21.  $\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u)\cos u + C$
22.  $\int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\sin u + C$
23.  $\int \tan^3 u du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$
24.  $\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$
25.  $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$
26.  $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$
27.  $\int \sin au \sin bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$
28.  $\int \cos au \cos bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$
29.  $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \sin bu - b \cos bu) + C$
30.  $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \cos bu + b \sin bu) + C$
31.  $\int \sinh u du = \cosh u + C$
32.  $\int \cosh u du = \sinh u + C$
33.  $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
34.  $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\operatorname{coth} u + C$
35.  $\int \tanh u du = \ln(\cosh u) + C$
36.  $\int \operatorname{coth} u du = \ln|\sinh u| + C$
37.  $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
38.  $\int u \ln u du = \frac{1}{2}u^2 \ln u - \frac{1}{4}u^2 + C$
39.  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
40.  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
41.  $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
42.  $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
43.  $\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a}\tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
44.  $\int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$