Matematiska Institutionen, KTH

Kontrollskrivning SF1633, Differentialekvationer I, den 27 september 2017 kl 08.00-10.00.

Examinator: Pär Kurlberg

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.
För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Lös begynnelseproblemet

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3 e^{4x}, \quad y(1) = 0$$

och ange det största intervall där lösningen är definierad.

Lösning: Efter division med x får vi integrerande faktor $\int e^{-2/x\,dx} = 1/x^2$, och

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = e^{4x}$$

dvs

$$y/x^2 = e^{4x}/4 + C$$

och således ges den allmänna lösningen av $y = x^2 e^{4x}/4 + Cx^2$. Initialvillkoret $y(1) = 0$ ger $C = -e^4/4$. Svar: $y = x^2(e^{4x}/4 - e^4/4)$; lösningen är definierad för all x.

---

2. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 4y\end{aligned} \tag{1}$$

- (2p) Bestäm en fundamental lösningsmängd till (1).
- (2p) Finn en fundamentalmatris $\Phi(t)$ och uttryck den allmänna lösningen till (1) med hjälp av $\Phi(t)$.

Lösning: matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ har egenvärden $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, med motsvarande egenvektorer $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. En fundamental lösningsmängd ges alltså av

$$x_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix},$$

Givet x_1, x_2 ser vi att

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ 2e^{3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen kan då skrivas som

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ 2e^{3t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

---

3. (4p) Använd variation av parametrar för att ange den allmänna lösningen till den icke-homogena differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 4y = -4e^{-2t}.$$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen för det homogena systemet är $r^2+4r+4 = 0 = (r+2)^2$ och en fundamentalmängd ges av

$$y_1 = e^{-2t}, \quad y_2 = te^{-2t},$$

och vi ser att Wronskianen $W = e^{-4t}$.

Variation av parametrar ger ekvationen

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -y_2(-4)e^{-2t} \\ y_1(-4)e^{-2t} \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 4te^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ -4 \end{pmatrix}$$

och vi får $u_1 = 2t^2 + c_1$, $u_2 = -4t + c_2$; vi kan välja $c_1 = c_2 = 0$. Således ges en partikulärlösning av

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = 2t^2e^{-2t} - 4t \cdot te^{-2t} = -2t^2e^{-2t}$$

och den allmänna lösningen ges av

$$y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-t2} - 2t^2e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
