Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 23 oktober 2017 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang. Lycka till!

1. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 1, \\ x_2' = x_1. \end{cases}$$

2. (4p) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

där

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi/2 \\ \sin(2t), & t \geq \pi/2. \end{cases}$$

3. Låt $f(t)$ vara den *udda* 2π-periodiska funktion som på intervallet $[0, \pi)$ ges av $f(t) = t^2$.

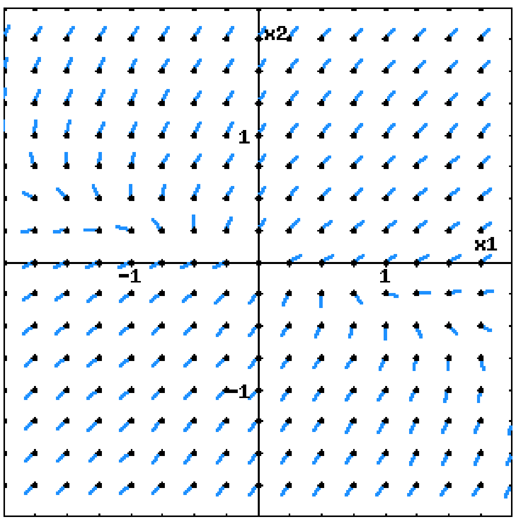
   (a) (1p) Konvergerar Fourierserien till $f(t)$ i punkterna $t = \pi$ och $t = \frac{3\pi}{2}$? I så fall till vad? Motivera.

   (b) (1p) Skissa grafen till f på intervallet $(-\pi, 3\pi)$.

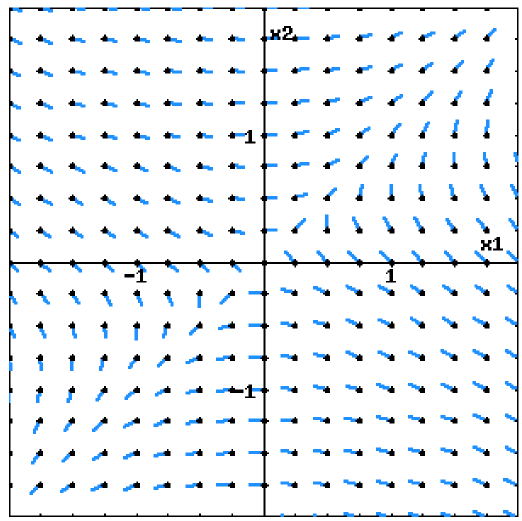
   (c) (2p) Beräkna Fourierserien till f. (Se sid 4.)

4. (4p) Para ihop de linjära systemen med motsvarande riktningsfält. (De blå linjerna är pilskaft, de svarta punkterna är pilspetsar.) **Anm.:** det räcker att räkna ut egenvärdena.

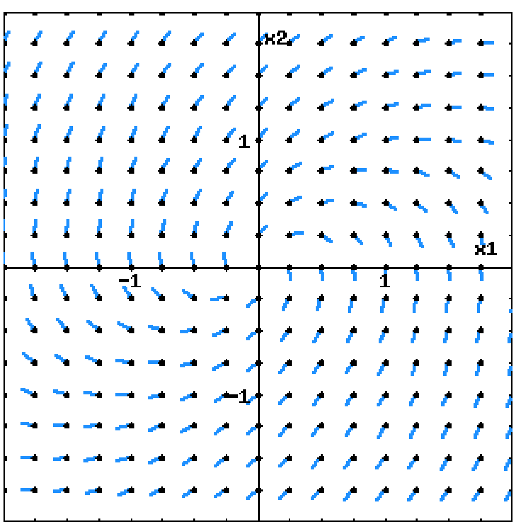
   1. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$
   2. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$
   3. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \vec{x}$
   4. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \vec{x}$



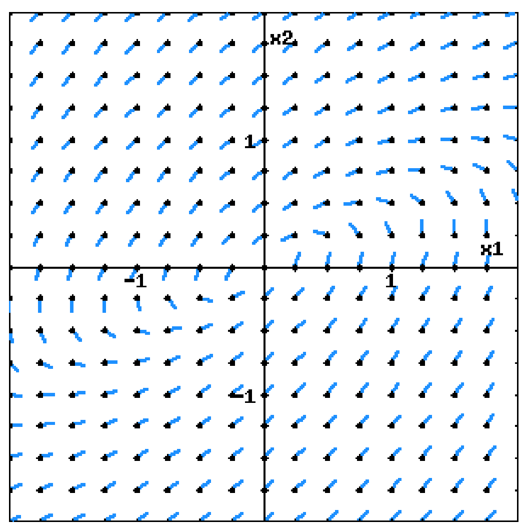
A



B



C



D

5. (4p) Bestäm alla kritiska punkter till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 \end{cases}$$

och klassificera dem (om möjligt) m.a.p. stabilitet.

6. Givet en konstant $c \geq 1$, betrakta den autonoma differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + c, \quad y(0) = 0.$$

(a) (2p) Antag att $c = 1$. Visa att $y(t) \to \infty$ inom ändlig tid, dvs att

$$\lim_{t \to t_1 -} y(t) = \infty$$

för något $t_1 > 0$.

(b) (2p) Antag att $c > 1$. Eftersom vi då får att $y^2 + c > y^2 + 1$ borde $y(t)$ växa snabbare än i del (a). Visa att denna intuition är korrekt, dvs att det finns $t_c < t_0$ så att

$$\lim_{t \to t_c -} y(t) = \infty$$

7. (4p) Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0,$$

samt

$$u(x, 0) = 1 + \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

(a) (2p) Bestäm två olika lösningar till begynnelsevärdesproblemet.

(b) (2p) Visa att begynnelsevärdesproblemet har oändligt många lösningar.

Formelblad om Fourierserier

En Fourierserie för en funktion f definierad på intervallet $(-p, p)$ ges av

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

där

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx,$$

och

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx.$$