Matematiska Institutionen, KTH

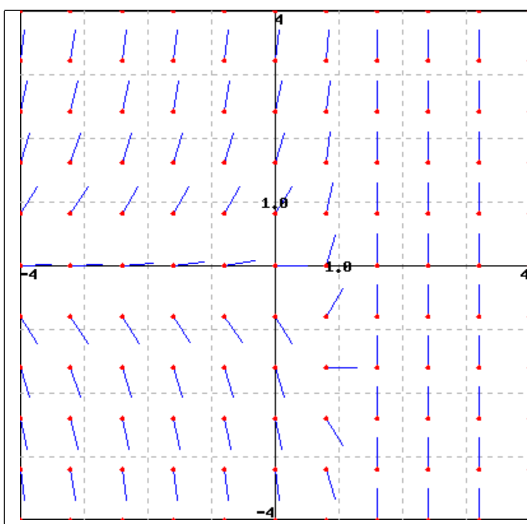
Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 18 december 2017 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg. Betygsgränser: A: 85%. B: 75%. C: 65%. D: 55%. E: 45%. Fx: 42%.

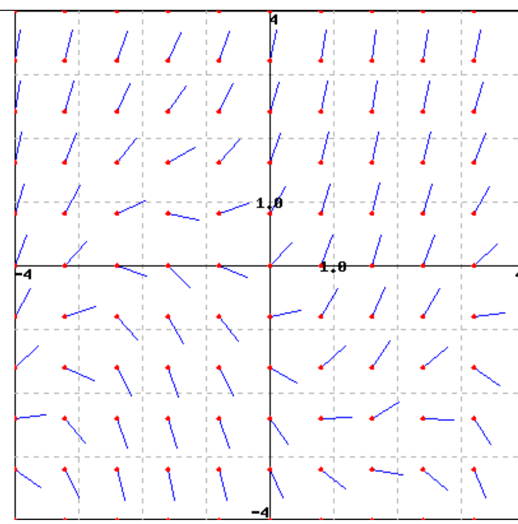
OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang. Lycka till!

1. (4p) Para ihop följande ekvationer med deras riktingsfält.

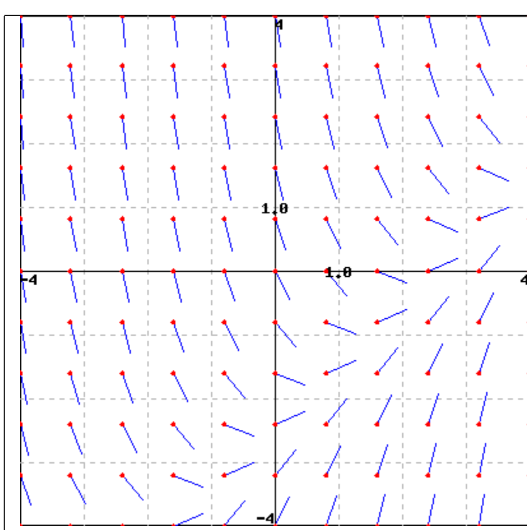
   1. $y' = -2 + x - y$
   2. $y' = 2y + x^2 e^{2x}$
   3. $y' = e^{-x} + 2y$
   4. $y' = 2\sin(x) + 1 + y$



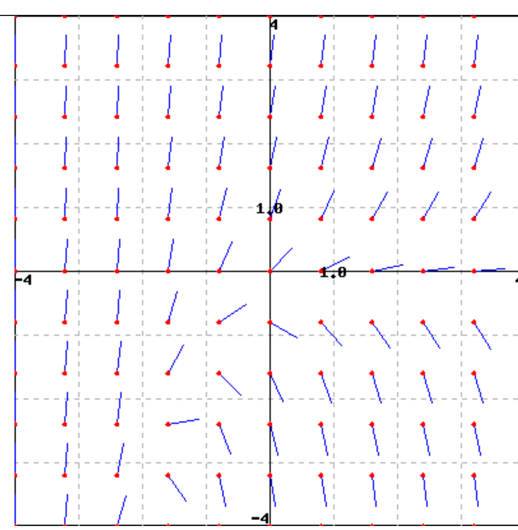
A



B



C



D

2. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\overline{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}$$

3. (4p) Låt $\delta(t)$ beteckna Diracs deltafunktion. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \delta(t-1) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

genom att använda Laplacetransformer.

4. (4p) Bestäm en kontinuerlig samt styckvist deriverbar lösing till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} + xy = f(x), \quad y(0) = 1$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{för } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{för } x \geq 1. \end{cases}$$

5. (4p) Skriv ekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

som ett första ordningens system. Klassificera dess kritiska punkter m.a.p. stabilitet för alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ sådana att $a < 0$.

6. (4p) Lös vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0,$$

samt

$$u(x,0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

7. (4p) Funktionen $y(t) = e^{\sqrt{t}}$ löser differentialekvationen $4ty'' + 2y' - y = 0$, $t > 0$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $4ty'' + 2y' - y = 4\sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}$, $t > 0$.

8. (4p) Låt f vara en funktion som definieras av ett andragradspolynom på intervallet $(-\pi, \pi)$. Antag att Fourierserien för f ges av

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx) \right).$$

Finn andragradspolynomet som beskriver f i $(-\pi, \pi)$.

Formelblad om Fourierserier

En Fourierserie för en funktion f definierad på intervallet $(-p, p)$ ges av

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

där

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx,$$

och

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx.$$