Matematiska Institutionen, KTH

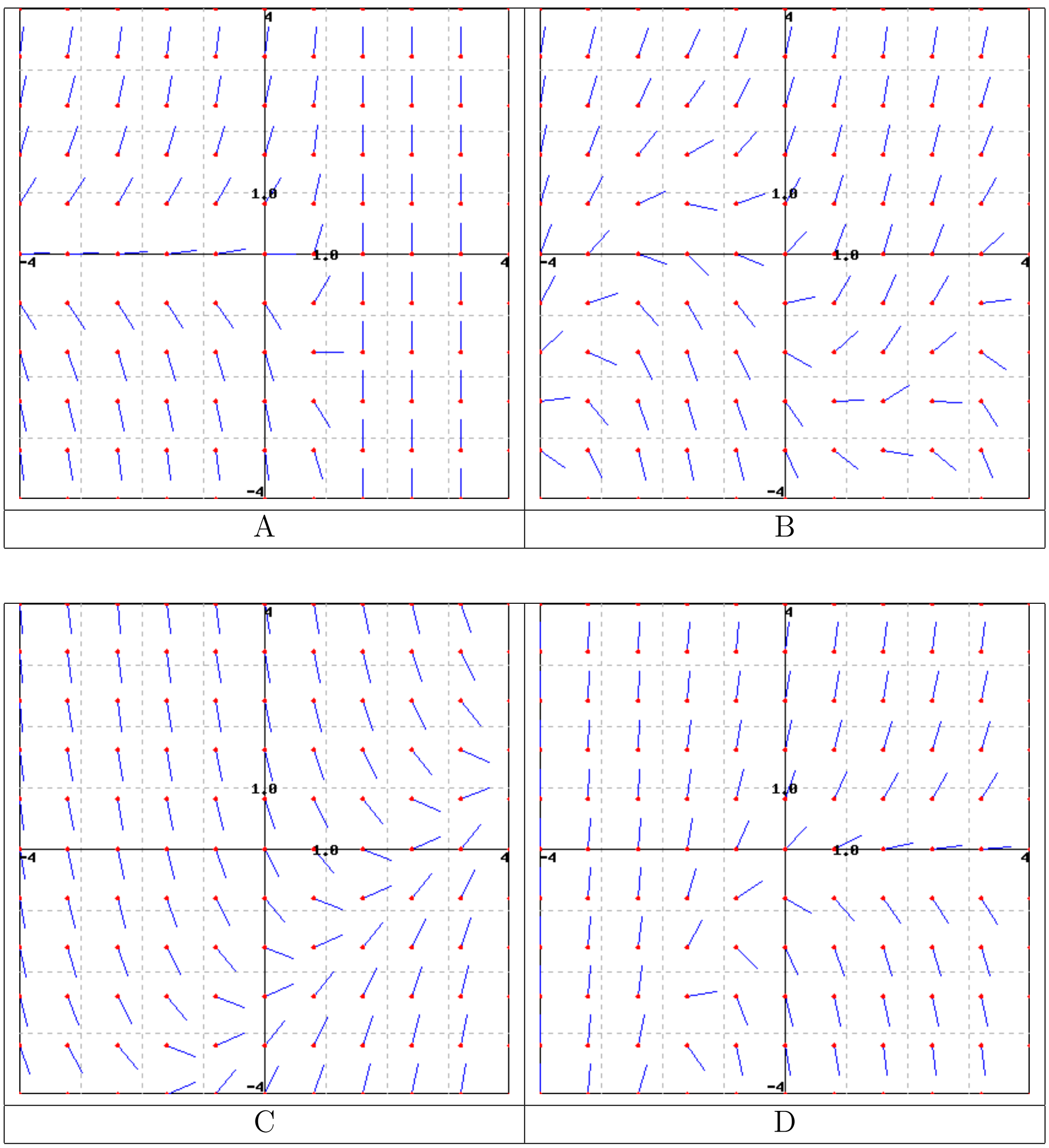
Tentamen SF1633, Differentialekvationer I, den 18 december 2017 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg. Betygsgränser: A: 85%. B: 75%. C: 65%. D: 55%. E: 45%. Fx: 42%.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang. Lycka till!

1. (4p) Para ihop följande ekvationer med deras riktingsfält.

   1. $y' = -2 + x - y$
   2. $y' = 2y + x^2 e^{2x}$
   3. $y' = e^{-x} + 2y$
   4. $y' = 2\sin(x) + 1 + y$



- 1. C.
- 2. A.
- 3. D.
- 4. B.

---

2. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\overline{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}$$

Med $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ får vi att $|(A - \lambda I)| = 0$ då $\lambda = \pm 3i$. Motsvarande egenvektorer ges av $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \end{pmatrix}^t$ samt $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \end{pmatrix}^t$.

Med $b_1 = Re(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ och $b_2 = Im(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ ges den allmänna lösningen av

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

där

$$y_1 = \cos(3t)b_1 - \sin(3t)b_2 = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}, \quad y_2 = \sin(3t)b_1 + \cos(3t)b_2 = \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \sin 3t + \cos 3t \end{pmatrix},$$

---

3. (4p) Låt $\delta(t)$ beteckna Diracs deltafunktion. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \delta(t-1) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

genom att använda Laplacetransformer.

Laplacetransformering ger

$$s^2 Y(s) - s \cdot 1 - 0 + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = e^{-s}$$

som efter förenkling ger att

$$Y(s) = \frac{s + 2 + e^{-s}}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}.$$

Inverstransform ger nu

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + (t-1)e^{t-1}\mathcal{U}(t-1)$$

eller

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} + te^{-t} & \text{om } 0 \le t < 1, \\ e^{-t} + te^{-t} + (t-1)e^{t-1} & \text{om } t \ge 1. \end{cases}$$

---

4. (4p) Bestäm en kontinuerlig samt styckvist deriverbar lösing till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} + xy = f(x), \quad y(0) = 1$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{för } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{för } x \geq 1. \end{cases}$$

Vi löser först $y' + xy = 4x$ för $0 \leq x < 1$: integrerande faktor ger

$$(ye^{x^2/2})' = 4xe^{x^2/2}$$

och vi får $ye^{x^2/2} = 4e^{x^2/2} + C$ dvs

$$y = 4 + Ce^{-x^2/2}$$

Insättning av $y(0) = 1$ ger $C = -3$ och således är $y(1) = 4 - 3e^{-1/2}$.

Vi löser nu $y' + xy = 0$ för $x \geq 1$, och $y(1) = 4 - 3e^{-1/2}$; med integrerande faktor får vi att

$$y = C_2 e^{-x^2/2}$$

och $y(1) = C_2 e^{-1/2} = 4 - 3e^{-1/2}$ ger att $C_2 = 4e^{1/2} - 3$.

Lösningen kan alltså skrivas som

$$y(x) = \begin{cases} 4 - 3e^{-x^2/2} & \text{då } 0 \leq x < 1, \\ (4e^{1/2} - 3)e^{-x^2/2} & \text{då } x \geq 1. \end{cases}$$

---

5. (4p) Skriv ekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

som ett första ordningens system. Klassificera dess kritiska punkter m.a.p. stabilitet för alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ sådana att $a < 0$.

Vi introducerar $y = x'$ och får då systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = -(a(x^2 - 1)y + x) \end{cases}$$

Kritiska punkter satisfierar $x' = 0$ samt $y' = 0$; det första villkoret ger $y = 0$, och efter insättning i det andra finner vi att $x = 0$. Den enda kritiska punkten är alltså $(x, y) = (0, 0)$. Jacobianen i $(0, 0)$ ges av

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(2axy + 1) & -a(x^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

Rötter till det karakteristiska polynomet $|J - \lambda I| = \lambda^2 - a\lambda + 1$ ges av

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4}{4}}$$

Om $a \leq -2$ är rötterna reella, och en av dem är negativ. Eftersom $|J| = 1$ måste båda rötterna vara negativa, och systemet är stabilt.

Om $-2 < a < 0$ finns det två komplexconjugerade rötter, med realdel $a/2 < 0$, dvs stabil spiral punkt.

---

6. (4p) Lös vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0,$$

samt

$$u(x,0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Vi gör ansatsen $u(x, y) = A(x)B(t)$ och får $AB'' = 5A''B$ som vi kan skriva om som

$$B''/B = 5A''/A = \lambda$$

Betrakta först $5A''/A = \lambda$, efter omskrivning får vi

$$A'' - (\lambda/5)A = 0$$

Om $\lambda = 0$ ser vi att $A(x) = \alpha x + \beta$, och $A(0) = A(1) = 0$ ger $A \equiv 0$; lösning ej intressant.

Om $\lambda > 0$ är lösningarna på formen $A(x) = c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx}$ där $w = \sqrt{\lambda/5}$; igen ger $A(0) = A(1) = 0$ att $A \equiv 0$ och lösningen ej intressant.

Om $\lambda < 0$, skriv $\lambda = -5w^2$ med $w \geq 0$. Lösningar ges då av $A(x) = c_1 \sin wx + c_2 \cos wx$. $A(0) = 0$ ger $c_2 = 0$. För icketrivial lösning har vi $c_1 \neq 0$, $A(1) = 0$ ger då att $\sin(w \cdot 1) = 0$, dvs $w = \pi n$ för $n \in \mathbb{Z}^+$, och $\lambda = \lambda_n = -5w^2 = -5\pi^2 n^2$.

Insättning i $B'' - \lambda B = 0$ ger

$$B'' + 5\pi^2 n^2 B = 0$$

vars lösningar ges av

$$B(t) = c_1 \sin(\sqrt{5}\pi n t) + c_2 \cos(\sqrt{5}\pi n t)$$

Således är $u_n(x,t) = \sin(\pi n x)(c_{1,n} \sin \sqrt{5}\pi n t + c_{2,n} \cos \sqrt{5}\pi n t)$ en lösning (bortsett från randvillkoren då $t = 0$);

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

ger att $c_{1,n} = 0$ för alla n.

Slutligen ger $u(x,0) = \sin \pi x + \sin 3\pi x$ att

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\sqrt{5}\pi t) + \sin(3\pi x)\cos(3\sqrt{5}\pi t)$$

---

7. (4p) Funktionen $y(t) = e^{\sqrt{t}}$ löser differentialekvationen $4ty'' + 2y' - y = 0$, $t > 0$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $4ty'' + 2y' - y = 4\sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}$, $t > 0$.

Ansatsen $v = ue^{\sqrt{t}}$ ger att $v' = u'y + uy'$, $v'' = u''y + 2u'y' + uy''$, som tillsammans med att y satisfierar $4ty'' + 2y' - y = 0$ ger

$$u'' + \frac{1}{\sqrt{t}}u' + \frac{1}{2t}u' = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2\sqrt{t}}$$

Skriver vi $w = u'$ och multiplicerar med den integrerande faktorn $e^{\int 1/\sqrt{t}+1/(2t)} = \sqrt{t}e^{2\sqrt{t}}$ får vi ekvationen

$$(w\sqrt{t}e^{2\sqrt{t}})' = 1$$

som ger

$$w = \sqrt{t}e^{-2\sqrt{t}} + Ae^{-2\sqrt{t}}/\sqrt{t}.$$

Då $w = u'$ får vi nu

$$u = \int w = -(1/2 + t + \sqrt{t})e^{-2\sqrt{t}} - Ae^{-2\sqrt{t}} + B$$

och vi ser att den allmänna lösningen (efter nya beteckningar på konstanter) ges av

$$v = ue^{\sqrt{t}} = c_1e^{-\sqrt{t}} + c_2e^{\sqrt{t}} - (t + \sqrt{t})e^{-\sqrt{t}}.$$

---

8. (4p) Låt f vara en funktion som definieras av ett andragradspolynom på intervallet $(-\pi, \pi)$. Antag att Fourierserien för f ges av

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx) \right).$$

Finn andragradspolynomet som beskriver f i $(-\pi, \pi)$.

Skriv först $f(x) = ax^2 + bx + c$. Utnyttjande av udda/jämnhet samt Fourierbasens ortogonalitet ger

$$-2 = b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx = \frac{b}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,dx = 2b$$

samt

$$-6 = a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(x)\,dx = -4a$$

och vi ser att $a = 3/2$ och $b = -1$.

Vi ser även att

$$2 = a_0/2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2 + c)\,dx = \frac{1}{2\pi}(\frac{2a}{3}\pi^3 + 2\pi c) = \pi^2/2 + c$$

och således är $c = 2 - \pi^2/2$

Alltså är $f(x) = 3x^2/2 - x + (2 - \pi^2/2)$.
