

Föreläsning 9

SF 1633 Differential ekvationer, HT16, Kurt Johansson

Inhomogena system

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t) \tag{1}$$

Om $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ är linjärt oberoende lösningsvektorer till motsvarande homogena ekvation,

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x},$$

och \bar{x}_p är en partikulärlösning till (1), dvs.

$$\bar{x}_p' = A(t)\bar{x}_p + \bar{F}(t),$$

så ges den allmänna lösningen till (1) av

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n + \bar{x}_p \tag{2}$$

Om
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ \underbrace{\phantom{x_{n1}}} & \underbrace{\phantom{x_{n2}}} & \dots & \underbrace{\phantom{x_{nn}}} \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

är en fundamentalmatrix, så kan (2) skrivas

$$\bar{x} = \Phi(t)\bar{c} + \bar{x}_p, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Variation av parametrar

Detta ger en metod att finna en partikulär-
lösning till (1) om vi känner en fundamentalmatrix.
Att $\Phi(t)$ är en fundamentalmatrix innebär att

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (3)$$

$n \times n$ $n \times n$ $n \times n$

och att Wronskianen $\det \Phi(t) \neq 0$, så $\Phi(t)$ är
inverterbar.

Variation av parametrar innebär att vi i den allmänna
lösningen

$$\Phi(t)\bar{c}$$

till den homogena ekvationen ersätter den konstanta
kolonnvektorn \bar{c} med en ny kolonnvektor $\bar{u}(t)$

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

och gör ansatsen

$$\bar{x}_p(t) = \Phi(t)\bar{u}(t) \quad (4)$$

för en partikulärlösning till (1), dvs. vi vill att

$$\bar{x}_p'(t) = A(t)\bar{x}_p(t) + \bar{F}(t) \quad (5)$$

Derivering av (4) ger

$$\bar{x}_p'(t) = \Phi'(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t) \quad (6)$$

$$= A\Phi(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t) \quad (3)$$

Insättning av (4) och (6) i (5) ger

$$A\Phi(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t) = A(t)\Phi(t)\bar{u}(t) + \bar{F}(t)$$

\Leftrightarrow

$$\Phi(t)\bar{u}'(t) = \bar{F}(t)$$

\Leftrightarrow

$$\bar{u}'(t) = \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t)$$

Vi kan nu integrera och få $\bar{u}(t)$

$$\bar{u}(t) = \int \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t) dt$$

Insatt i (4) ger detta

$$\bar{x}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t) dt$$

$n \times 1$

$n \times n$

$\underbrace{n \times n \quad n \times 1}_{n \times 1}$

integrera varje komponent

Den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t)$$

ges alltså av

$$\bar{x} = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} \bar{F}(t) dt \quad (7)$$

↑
allmän lösning
till den homogena ekv.

↑
partikulär lösning till
den inhomogena ekv.

om $\Phi(t)$ är en fundamentalmatrix.

(7) ger alltså en explicit lösning förutsatt att vi har bestämt en fundamentalmatrix och utfört integrationen i (7).

Om $A(t) = A$ är konstant kan vi i princip bestämma fundamentalmatrixen.

Kommentar: Om $n=1$ är (7) den formel vi har härlett tidigare för att lösa en första ordningens linjär ODE.

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}.$$

Vi använder variation av parametrar. Betrakta först den homogena ekvationen. Eigenvärden:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

Egenvektorer:

$$\lambda = 3: \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k_1 = 4k_2, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ egenvekt.}$$

$$\lambda = -3: \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k_1 = -2k_2, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ egenvekt.}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \text{ och } \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} \text{ linjärt oberoende lösningar}$$

till den homogena ekvationen.

$$\text{Fundamentalmatris: } \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} = \Phi(t)$$

$$\det \Phi(t) = -6$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t)^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -2e^{-3t} \\ -e^{3t} & 4e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}$$

En partikulärlösning ges av

$$\bar{X}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} \bar{F}(t) dt$$

$$\Phi(t)^{-1} \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-2t} \\ \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{2}{3}te^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\int \Phi(t)^{-1} \bar{F}(t) dt = \begin{pmatrix} \int \left(\frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-2t} \right) dt \\ \int \left(\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{2}{3}te^{4t} \right) dt \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{1}{6}e^{-4t} dt = -\frac{1}{24}e^{-4t}, \quad \int \frac{1}{6}e^{2t} dt = \frac{1}{12}e^{2t}$$

$$\int \frac{1}{3}e^{-2t} dt = -\frac{1}{6}te^{-2t} + \frac{1}{6} \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{6}te^{-2t} - \frac{1}{12}e^{-2t}$$

$$\int \frac{2}{3}te^{4t} dt = \frac{1}{6}te^{4t} - \frac{1}{6} \int e^{4t} dt = \frac{1}{6}te^{4t} - \frac{1}{24}e^{4t}$$

$$\int \Phi(t)^{-1} F(t) dt = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} e^{-4t} - \frac{1}{6} t e^{-2t} - \frac{1}{12} e^{-2t} \\ \frac{1}{12} e^{2t} + \frac{1}{6} t e^{4t} + \frac{1}{24} e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_p(t) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-4t} - 4te^{-2t} - 2e^{-2t} \\ 2e^{2t} - 4te^{4t} + e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -4e^{-t} - 16te^t - 8e^{-t} + 4e^{-t} - 8te^t + 2e^t \\ -e^{-t} - 4te^t - 2e^t - 2e^{-t} + 4te^t - e^t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -(24t+6)e^t \\ -3e^t - 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} (8t+2)e^t \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{X} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (8t+2)e^t \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Ex. forts. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{X}_0$$

vill jag säga att det är möjligt för alla...

ni

Insättning av $t=0$ i (8) ger

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dvs. vi får ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och vi får lösningen

$$\bar{x} = \frac{7}{24} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (8t+2)e^t \\ e^t + e^t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -(24t+6)e^t + 28e^{3t} + 2e^{-3t} \\ -3e^t - 3e^t + e^{3t} - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

□

Genom att utnyttja (7) kan vi skriva ner en formel för lösningen till begynnelsevärdeproblemet

$$\begin{cases} \bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (9)$$

Som partikulärlösning kan vi välja en viss primitiv funktion i integrationen: (71), t-ex:

$$\bar{x}_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s) ds$$

så att partikulärlösningen satisfierar $\bar{x}_p(t_0) = 0$.
Vi får då

$$\bar{x} = \Phi(t) \bar{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s) ds$$

och begynnelsevillkoret ger

$$\bar{x}_0 = \bar{x}(t_0) = \Phi(t_0) \bar{c} \Rightarrow \bar{c} = \Phi(t_0)^{-1} \bar{x}_0$$

Lösningen till (9) ges alltså av

$$\bar{x}(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s) ds. \quad (10)$$

□

$U(t, s) = \Phi(t) \Phi(s)^{-1}$ kallas ibland propagatorn.

Om vi har den homogena ekvationen $\bar{x}' = A\bar{x}$ med begynnelsevillkoret $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ så ges lösningen av

$$\bar{x}(t) = U(t, t_0) \bar{x}_0 = U(t, t_0) \bar{x}(t_0)$$

dvs. $U(t, t_0)$ "propagerar" lösningen från $\bar{x}(t_0)$ till $\bar{x}(t)$.

Ex. forts Bestäm lösningen till begynnelsevärdsproblemet

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 28 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{x}_0$$

genom att använda formeln (10).

Vi har ovan visat att vi har

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$$

Som ovan får vi

$$\int_0^t \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s) ds = \begin{pmatrix} \int_0^t \left[\frac{1}{6}e^{-4s} + \frac{s}{3}e^{-2s} \right] ds \\ \int_0^t \left[\frac{1}{6}e^{2s} - \frac{2}{3}se^{4s} \right] ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[-\frac{1}{24}e^{-4s} - \frac{1}{6}se^{-2s} - \frac{1}{12}e^{-2s} \right]_0^t \\ \left[\frac{1}{12}e^{2s} - \frac{1}{6}se^{4s} + \frac{1}{24}e^{4s} \right]_0^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{24}e^{-4t} - \frac{1}{6}te^{-2t} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{6}te^{4t} + \frac{1}{24}e^{4t} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Vi får

$$\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s) ds = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} (8t+2)e^t \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -(8t+2)e^t + 4e^{3t} - 2e^{-3t} \\ -e^t - e^{-t} + e^{3t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) \Phi(0)^{-1} \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Alltså ges lösningen av

$$\bar{x} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -(24t+6)e^t + 12e^{3t} - 6e^{-3t} \\ -3e^t - 3e^{-t} + 3e^{3t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 16e^{3t} + 8e^{-3t} \\ 4e^{3t} - 4e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -(24t+6)e^t + 28e^{3t} + 2e^{-3t} \\ -3e^t - 3e^{-t} + e^{3t} - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

vilket förstås är samma som vi fick tidigare.

Vi har tidigare använt variation av parametrarna på ekvationen

$$y'' + Py' + Qy = f. \quad (9)$$

Vi kan betrakta denna ekvation som ett linjärt system av första ordningen genom att sätta $x_1 = y, x_2 = y'$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -Qx_1 - Px_2 + f \end{cases}$$

$$\text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}}_{F(t)} \quad (10)$$

Om $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd till (9) blir

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \Phi(t) \text{ en fundamentalmatris till (10).}$$

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}$$

Ovan hade vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} &= \Phi(t)^{-1} F(t) = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y_2 R / W(y_1, y_2) \\ y_1 R / W(y_1, y_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vilket är samma ekvationer som tidigare.