

Föreläsning 8

SF1633 Differentialekvationer TT16. Kurt Johansson

Homogena linjära system med konstanta koefficienter

Betrakta ett homogent, linjärt första ordningens system

$$\bar{x}' = A\bar{x} \quad (1)$$

där A är en konstant $n \times n$ -matris.

Om

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

eller

$$\bar{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Vi provar mer allmänt att hitta lösningar på formen

$$\bar{x} = \bar{k} e^{\lambda t} \quad (2)$$

där $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ är en konstant vektor och λ ett tal

Insättning av (2) i (1) ger

$$\lambda \bar{k} e^{\lambda t} = A \bar{k} e^{\lambda t} \Leftrightarrow A \bar{k} = \lambda \bar{k}$$

λ ska alltså vara ett egenvärde till A och \bar{k} motsvarande egenvektor.

λ är en lösning till karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Vi kan skilja på två fall

- 1) A har n olika egenvärden, reella eller komplexa
- 2) A har multipla egenvärden, dvs. karakteristiska ekvationen har multipelrötter.

Fallet 2) är svårare och vi ska inte behandla det fullständigt.

- 1) Antag att A har n olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Låt $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ vara tillhörande egenvektorer:

$$A \bar{k}_j = \lambda_j \bar{k}_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Då ger

$$\bar{x}_1 = \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \bar{x}_n = \bar{k}_n e^{\lambda_n t}$$

n st linjärt oberoende Lösningsektorer, en fundamentalmenngd. ($\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ linjärt oberoende)

Den allmänna lösningen till $\bar{x}' = A\bar{x}$ ges av

$$\bar{x} = c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \bar{k}_n e^{\lambda_n t}.$$

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 \end{cases} \quad (3)$$

I matrisform $\bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_A \bar{x}.$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda + 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda + 1) - 2$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ eller } 2.$$

$(A - \lambda I)\bar{k} = 0$ ges

1) $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dvs. $\begin{cases} k_1 - k_2 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$

$k_1 = k_2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor

2) $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k_2 = -2k_1$

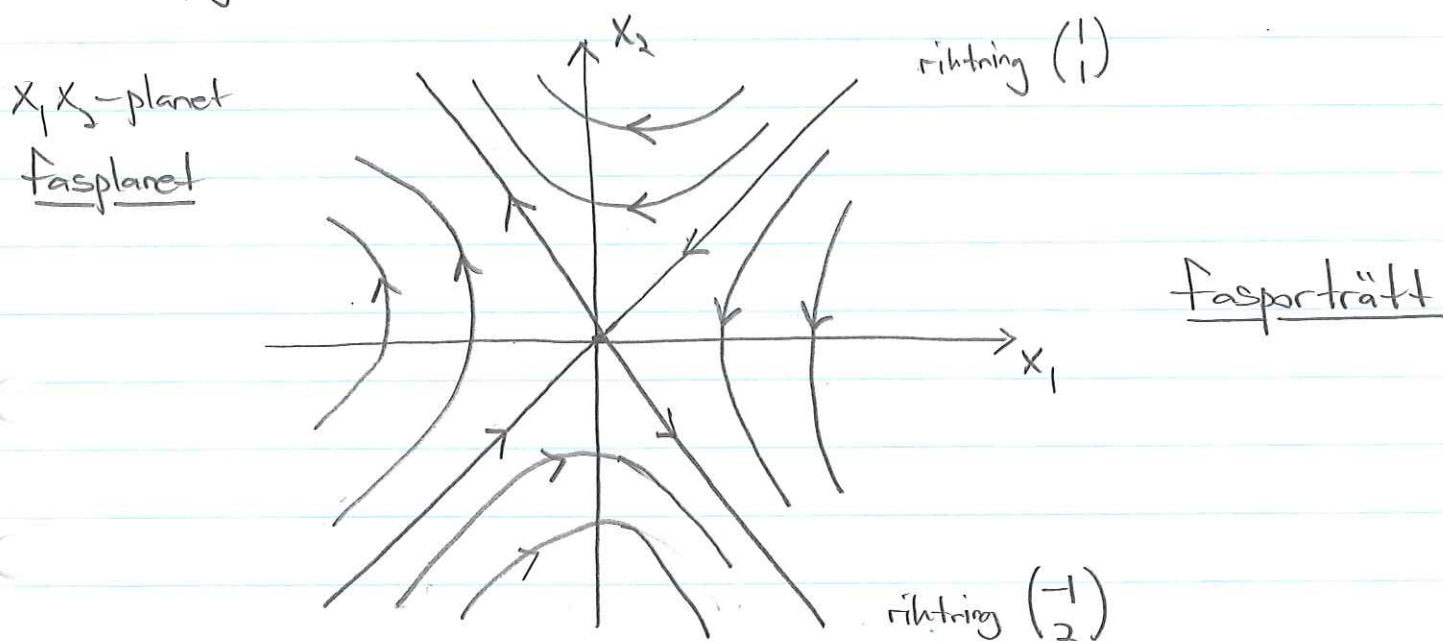
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en egenvektor

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ x_2 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$\bar{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ger en kurva i x_1, x_2 -planet ofta kallad en ban eller trajektorik (tänka på $(x_1(t), x_2(t))$ som ett läge för en partikel vid tiden t)



Origo är en stationär punkt. (högerledet i ekvationer = 0)

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \text{ tangentvektorn för banen i } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Högerledet i (3) ger tangentvektorn i varje punkt.

Multipelt reellt egenvärde λ

$m =$ egenvärdets multiplicitet i karakteristiska ekvationen = algebraisk multiplicitet

geometrisk multiplicitet = egenrummets dimension

○ dvs. dimensionen av det rum som spänns upp av alla egenvektorer till λ .

○ Det gäller alltid

$$\text{geometrisk multiplicitet} \leq \text{algebraisk multiplicitet} \quad (4)$$

Om vi har strikt olikhet får vi inte direkt tillräckligt många linjärt oberoende lösningar.

○ Vi betraktar bara fallet $n=2$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A \text{ konstant } 2 \times 2\text{-matris}$$

Antag att $\det(A - \lambda I)$ har en dubbelrot λ .

1) Till λ hör två linjärt oberoende egenvektorer \bar{k}_1, \bar{k}_2 (likhet i (4)).

$$c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda t} + c_2 \bar{k}_2 e^{\lambda t} \quad \text{allmän lösning}$$

2) Till λ hör bara en egenvektor (bortsett från multipler) dvs. strikt olikhet i (4). Lösningar finns på formen

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \bar{k} e^{\lambda t} \\ \bar{x}_2 &= \bar{k} t e^{\lambda t} + \bar{p} e^{\lambda t}\end{aligned}\quad (5)$$

där

$$(A - \lambda I)\bar{h} = 0, \quad \bar{h} \text{ egenvektor} \quad (6)$$

$$(A - \lambda I)\bar{p} = \bar{h}$$

Vi ser att, om (6) gäller är

$$\begin{aligned}\bar{x}_2' - A\bar{x}_2 &= \bar{h}(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) + \bar{p}\lambda e^{\lambda t} - A\bar{h} t e^{\lambda t} - A\bar{p} e^{\lambda t} \\ &= (\bar{h} + \lambda\bar{p} - A\bar{p})e^{\lambda t} + (\lambda\bar{h} - A\bar{h})t e^{\lambda t}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{(\bar{h} - (A - \lambda I)\bar{p})}_{=0} e^{\lambda t} - \underbrace{(A - \lambda I)\bar{h}}_{=0} t e^{\lambda t} = 0.$$

Ex. 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$, alla vektorer är egenvektorer med egenvärde 2. Vi kan välja

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som en bas i egenrummet ($=\mathbb{R}^2$). Vi får

$$\bar{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix},$$

vilket vi förstas också kunnat få direkt ur

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$$

Ex. 2 Bestäm den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}}_A \bar{x}$$

Eigenvärden

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) + 4 = (\lambda-4)^2,$$

dvs. $\lambda = 4$ dubbelrot. Eigenvektorer $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

$$(A - 4I)\bar{k} = \begin{pmatrix} -2k_1 + 4k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ger } k_1 = 2k_2$$

Vi kan ta

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ som egenvektor}$$

$$(A - 4I)\bar{p} = \bar{k} \text{ ger}$$

$$\begin{cases} -2p_1 + 4p_2 = 2 \\ -p_1 + 2p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -p_1 + 2p_2 = 1.$$

En lösning är $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{4t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{4t}$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{X} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Komplexa egenvärden

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm först egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16-17} = 4 \pm i.$$

Egenvektorer: $\lambda = 4+i$

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2+i) · första raden = andra raden, raderna ligger helt beroende. |

(2-i)k₁ - k₂ = 0, k₂ = (2-i)k₁, $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ en egenvektor

$$\lambda = 4-i$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \text{ en egenvektor}$$

Samma som för 4+i men höjjer rad i → -i. Beträkta

lösningen

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(4+i)t}$$

Real- och imaginärdelen av detta ger reella lösningar.

$$e^{(4+i)t} = e^{4t} (\cos t + i \sin t)$$

$$\bar{x}(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ (2-i)(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}}_{\bar{x}_1(t)} e^{4t} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}}_{\bar{x}_2(t)} e^{4t}$$

Real- och imaginärdelarna ger två linjärt oberoende lösningsvektorer, ty Wronskianen

$$= \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & -\cos t + 2\sin t \end{vmatrix} e^{8t} = -e^{8t} \neq 0.$$

Den allmänna lösningen är

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} e^{4t}$$

Alltså

$$\begin{cases} x = (c_1 \cos t + c_2 \sin t) e^{4t} \\ y = [c_1 (2\cos t + \sin t) + c_2 (-\cos t + 2\sin t)] e^{4t}. \end{cases}$$