Föreläsning 7

SF1633 Differentialekvationer HT 16. Kurt Johansson

System av ODE

Ett första ordningens system av ordinära differentialekvationer har formen

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

där $x_1(t), \dots, x_n(t)$ är de okända funktionerna och t den oberoende variabeln. Ett linjärt system har formen

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (1)$$

dvs. $g_1, \dots, g_n$ är linjära funktioner av $x_1, \dots, x_n$, men koefficienterna kan bero på t.

Det är praktiskt att skriva (1) på matrisform. Sätt

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Då kan (1) skrivas

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t) \quad , t \in I \qquad (2)$$

eller

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{F}.$$

Om $\bar{x}(t)$ satisfierar (2) för $t \in I$ så är $\bar{x}(t)$ en <u>lösningsvektor</u> till (2).

<u>Ex.</u>
$$\begin{cases} x' = 3x + y + \sin t \\ y' = -x + ty - \cos t \end{cases}$$

kan skrivas

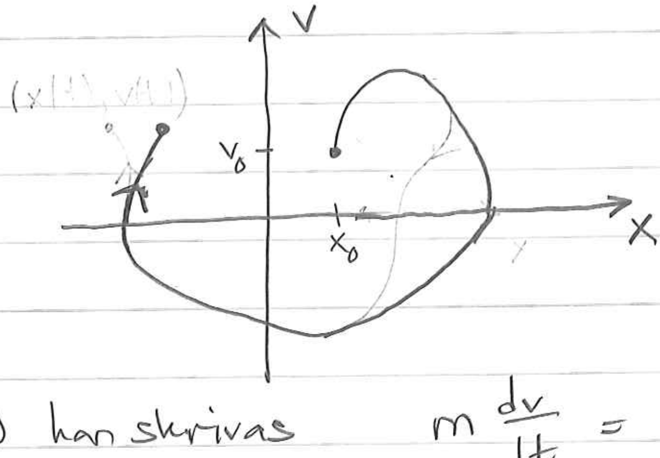
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

En ODE av högre ordning kan skrivas som ett första ordningens system.

Ex. Newtons andra lag. $x = x(t) \in \mathbb{R}$ läge för en partikel vid tiden t.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \qquad (3)$$

Vi har en kraft som beror på läge, hastighet $v = \frac{dx}{dt}$ och tid. Betrakta $x(t)$ och $v(t)$ som de variabler som beskriver systemet. Om vi betraktar (3) tillsammans med ett begynnelsevillkor $x(0) = x_0$ och $v(0) = x'(0) = v_0$ så bestämmer (3) $x(t)$ för alla $t \geq 0$ (givet vissa förutsättningar på F), och därmed $v(t) = x'(t)$ för alla $t \geq 0$. Vi kan tänka på detta som att vi har en bana i (x,v)-planet, kallat fasplanet:



(3) kan skrivas $m\frac{dv}{dt} = F(x, v, t)$ vilket tillsammans med $v = \frac{dx}{dt}$ ger

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = F(x, v, t) \end{cases} \qquad (4)$$

(4) är det första ordningens system som hör till (3).

Mer allmänt kan vi betrakta

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (5)$$

och sätta $x_1 = y,\ x_2 = y',\ \dots,\ x_n = y^{(n-1)}$ och få systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \qquad (6)$$

Om (5) är en linjär ekvation blir också (6) ett linjärt system.

Ex. $y'' + ty' - 3y = t^3$

$x_1 = y,\ x_2 = y'$ ger

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 3x_1 - tx_2 + t^3 \end{cases}$$

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -t \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Linjära första ordningens system

$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{F}$, $\bar{F} \neq 0$ inhomogent system

$\bar{x}' = A\bar{x}$ motsvarande homogena system

Sats (Superpositionsprincipen). Om $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ är lösningsvektorer till det homogena systemet

$$\bar{x}' = A\bar{x} \quad , t \in I$$

så är varje linjärkombination

$$\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + \dots + c_k\bar{x}_k , \qquad c_i \in \mathbb{R} \text{ konstanter}$$

också en lösning på I.

Bevis: Vi har att

$$\bar{x}' = c_1\bar{x}_1' + \dots + c_k\bar{x}_k' = c_1 A_1\bar{x}_1 + \dots + c_k A\bar{x}_k$$

$$= A(c_1\bar{x}_1 + \dots + c_k\bar{x}_k) = A\bar{x}. \qquad \blacksquare$$

På samma sätt som vi hade en existens- och entydighetssats för linjära ekvationer av högre ordning har vi det för linjära system av första ordningen.

Sats. (Existens och entydighet). Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{F}(t) & , \ t \in I \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 & , \ t_0 \in I \end{cases}$$

där $A(t)$ och $\bar{F}(t)$ är kontinuerliga på I har en entydig lösning på intervallet I.

Beviset utelämnas.

Def. Vi säger att lösningsvektorerna $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ till

$\bar{x}' = A\bar{x}$, $t \in I$, är linjärt beroende på I om det finns konstanter $c_1, \dots, c_n$, ej alla $= 0$, så att

$$c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n = 0 \quad \text{för alla } t \in I.$$

I annat fall är de linjärt oberoende.

Sats Låt

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \bar{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

vara lösningsvektorer till det linjära systemet

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \quad t \in I.$$

Då är de linjärt oberoende på I om och endast om Wronskianen

$$W(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

för alla $t \in I$.

Bevis: Analogt med motsvarande sats för högre ordn. ekvationer

Ex. $y'' + Py' + Qy = 0$ svarar mot systemet

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Om $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd får vi lösningsvektorerna

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \text{ och } \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Wronskianen blir

$$W(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

vilket är samma Wronskian som vi hade tidigare.

<u>Ex.</u>

$$\bar{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

är lösningar till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} \tag{7}$$

på hela $\mathbb{R}$. Wronskianen blir

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}.$$

Vi säger att $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)$ är en fundamentalmängd av lösningar till (7). Matrisen

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix} = \Phi(t)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \bar{x}_1(t) & \bar{x}_2(t) \end{array}$$

kallas <u>fundamentalmatris</u> för (7).

<u>Def.</u> Om $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ är n stycken linjärt oberoende lösningar till systemet

$$\bar{x}' = A\bar{x} \quad , t \in I, \tag{8}$$

av storlek n, så utgör de en <u>fundamentalmängd</u> av lösningar till (8) på I och

$$\Phi(t) = (\bar{x}_1(t) \dots \bar{x}_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

kallas en <u>fundamentalmatris</u> till (8). Observera att

$$\Phi'(t) = (\bar{x}_1'(t) \dots \bar{x}_n'(t)) = (A\bar{x}_1 \dots A\bar{x}_n)$$

$$= A\Phi(t).$$

Fundamentalmatrisen är en $n \times n$-matris som uppfyller

$$\Phi'(t) = A\Phi(t)$$

och Wronskianen $\det \Phi(t) \neq 0$, $t \in I$.

Mängden av alla lösningar till (8) bildar ett vektorrum av dimension n och $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ är en bas i detta lösningsrum. Den <u>allmänna lösningen</u> till (8) ges av

$$\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi(t)\bar{c}.$$

Ex. forts. Vi såg ovan att systemet

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \overline{x} \qquad (9)$$

har fundamentalmatrisen

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges då av

$$\overline{x} = \Phi(t)\,\overline{c} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{6t} \\ -c_1 e^{-2t} + 5c_2 e^{6t} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

dvs.

$$x_1(t) = c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{6t}, \quad x_2(t) = -c_1 e^{-2t} + 5c_2 e^{6t}$$

Ex. forts. Lös (9) under begynnelsevillhoret $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$. Vi får

$$\overline{x}(0) = \Phi(0)\,\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs. ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 1 \\ -1 + 5c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 5/8 \\ c_2 = 1/8 \end{cases}.$$

(Detta fås förstås också från (10).)

Svar: $x_1(t) = \frac{1}{8}(5e^{-2t} + 3e^{6t})$, $x_2(t) = \frac{1}{8}(-5e^{-2t} + 5e^{6t})$

Om $\overline{x}_p$ är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen

$$\overline{x}' = A\overline{x} + \overline{F} \tag{11}$$

och Φ är en fundamentalmatris till $\overline{x}' = A\overline{x}$ så ges den allmänna lösningen till (11) av

$$\underbrace{\overline{x}}_{\substack{\text{allmän} \\ \text{inhomogen lösning}}} = \underbrace{\Phi\overline{c}}_{\substack{\text{allmän} \\ \text{homogen lösning}}} + \underbrace{\overline{x}_p}_{\text{partikulärlösning}}$$

<u>Ex.</u> a) Visa att $\overline{x}_p = \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix}$ är en partikulär-lösning till

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^t \\ 7e^t \end{pmatrix} \tag{12}$$

b) Vi vet att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{5t}$$

är lösningar till motsvarande homogena ekvation. Vad är den allmänna lösningen till (12)?

Lösning a) Derivering ger

$$\bar{X}_p' = \begin{pmatrix} e^t + (1+t)e^t \\ -e^t + (1-t)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t + te^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

lika

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^t \\ 7e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t + te^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

b) Vi ser att $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$ är linjärt oberoende.

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix}$$

dvs.

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{5t} + (1+t)e^t \\ x_2 = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t} + (1-t)e^t \end{cases}.$$