Föreläsning 6

SF1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson

Antag att y_1 är en lösning till

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Vi kan då hitta en andra, linjärt oberoende lösning till (1) genom ansatsen $y = uy_1$, där u är en ny okänd funktion som vi vill bestämma.

Betrahta mer allmänt

$$y'' + Py' + Qy = R \qquad (2)$$

och antag att

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0. \qquad (3)$$

Gör variabelbytet $y = uy_1$ i (2). Derivering ger

$$y' = u'y_1 + uy_1'$$
$$y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

Sätt in detta i vänstra ledet i (2)

$$y'' + Py' + Qy = u''y_1 + (2y_1' + Py_1)u'$$
$$+ \underbrace{(y_1'' + Py_1' + Qy_1)}_{=0}u = y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

Ekvationen (2) blir

$$y_1 u'' + (2y_1' + Py_1)u' = R$$

Sätter vi $v = u'$ får vi en första ordningens linjär ekvation för v som vi kan lösa,

$$y_1 v' + (2y_1' + Py_1)v = R. \qquad (4)$$

Metoden ovan kallas därför reduktion av ordning. Från v kan vi få u genom ytterligare en integration.

Ex. Ekvationen $y'' + 2ay' + a^2 y = 0$ har lösningen $y = e^{ax}$ (från ansatsen $y = e^{rx}$). $P = -2a$, $Q = a^2$, $R = 0$ och $y_1 = e^{ax}$; (4) ger

$$e^{ax} v' + (2ae^{ax} - 2ae^{ax})v = 0$$

dvs.

$$v' = 0 \Leftrightarrow v = c \Leftrightarrow u' = c \Leftrightarrow u = cx + d$$

$$y_2 = (cx+d)e^{ax}$$

ger också en lösning.

$\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ en fundamentalmängd.

Inhomogena ekvationer

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (2)$$

En speciell lösning till (2) $Y_p(x)$ kallas en partikulärlösning.

Sats Låt $Y_p(x)$ vara en partikulärlösning till (2), och låt $y_1, \dots, y_n$ vara en fundamentalmängd av lösningar till motsvarande homogena ekvation ((2) med $g=0$). Den allmänna lösningen till (2) ges då av

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + Y_p$$

där $c_1, \dots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

Bevis: Skriv (2) som $Ly = f$. Om y löser (2) så gäller

$$L(y - Y_p) = Ly - LY_p = f - f = 0,$$

dvs. $y - Y_p$ är en lösning till den homogena ekv. Den allmänna lösningen till denna ges av $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, varför vi måste ha

$$y - Y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

för några konstanter $c_1, \dots, c_n$. ∎

Strategi för att lösa (2):

- Finn en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen
- Finn en partikulärlösning till den homogena ekvationen.

Ex. $y'' + y = e^x$,

Vi ser lätt att $\frac{1}{2}e^x$ ger en partikulärlösning.

$y'' + y = 0$ har allmän lösning $c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Allmäna lösningen ges av $\frac{1}{2}e^x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Variation av parametrar

Detta är en metod att hitta en partikulärlösning om vi känner en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen. Betrakta fallet $n=2$.

Låt y_1, y_2 vara två linjärt oberoende lösningar till

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (3)$$

Vi söker en partikulärlösning till

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

på formen $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$.

Vi får

$$y' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$
$$= y_1'v_1 + y_2'u_2 + (y_1u_1' + y_2u_2')$$

<u>Antag</u> att vi också väljer u_1 och u_2 så att

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0. \tag{4}$$

Vi undviker då andraderivator av u_1, u_2 då vi beräknar y''. Om (4) gäller får vi

$$y'' = y_1''u_1 + y_1'u_1' + y_2''u_2 + y_1'u_2'$$

Insättning i ekv. ger

$$f = y'' + Py' + Qy = \underbrace{(y_1'' + Py_1' + Qy_1)}_{=0}u_1 + \underbrace{(y_2'' + Py_2' + Qy_2)}_{=0}u_2$$
$$+ y_1'u_1' + y_2'u_2',$$

alltså

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f \tag{5}$$

(4) och (5) ger tillsammans ett ekvationssystem för u_1' och u_2':

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = f \end{cases} \tag{6}$$

Detta ekvationssystem har determinanten

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0,$$

ty $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen. Alltså har ekvationssystemet (6) en entydig lösning u_1', u_2' ur vilken u_1, u_2 i princip kan bestämmas genom integration.

Explicit får vi

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W}.$$

Ex. Ekvationen

$$x^2y'' - 2y = x, \ x \neq 0$$

har lösningar på formen $y = x^m$. Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$x^2 y'' - 2y = x, \quad x \neq 0.$$

Vi skriver ekvationen på standardform

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = \frac{1}{x}$$

Ansatsen $y = x^m$ i motsvarande homogena ekvation ger

$$m(m-1)x^{m-2} - 2x^{m-2} = 0$$

$$(m^2 - m - 2)x^{m-2} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

eftersom $x \neq 0$. Vi får $m = -1$ eller $m = 2$.

$y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-1}$ linjärt oberoende lösningar,

Ansatsen $y = y_1 u_1 + y_2 u_2$ och metoden med variation av parametrar ger enligt ovan

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x^2 u_1' + \frac{1}{x} u_2' = 0 \\ 2x u_1' - \frac{1}{x^2} u_2' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Multiplicera den andra ekvationen med $x/2$,

$$\begin{cases} x^2 u_1' + \frac{1}{x} u_2' = 0 \\ x^2 u_1' - \frac{1}{x^2} u_2' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Detta ger $u_1' = \frac{1}{3x^2}$, $u_2' = -\frac{1}{3} x$ dvs.

$$u_1 = -\frac{1}{3x} + d_1 , \quad u_2 = -\frac{x^2}{6} + d_2 .$$

Vi kan välja $d_1 = d_2 = 0$, vilket ger partikulärlösningen

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 = x^2\left(-\frac{1}{3x}\right) + \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6}\right) = -\frac{x}{2} .$$

Den allmänna lösningen ges av

$$y = -\frac{x}{2} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$