Föreläsning 5

SF 1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson

Linjära ODE av ordning n

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall, $x_0 \in I$, $y = y(x)$ och betrakta begynnelsevärdesproblemet:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

där $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ är givna tal.

Sats (Existens och entydighet). Antag att $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner i I och att $a_n(x) \neq 0$, $x \in I$. Då har begynnelsevärdesproblemet (1) en entydig lösning i hela I.

Som vi ska se senare är (1) ett specialfall av linjära första ordningens system, och för dessa finns en existens- och entydighetssats av den typ vi redan diskuterat. Från denna följer resultatet i en omgivning av x_0. Det som är nytt i satsen ovan för linjära ODE är att existens och entydighet gäller för hela intervallet I.

Repetition

Betrakta den linjära ODE'n

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (a_2 \neq 0)$$

där $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ är konstanter. Insättning av ansatsen $y = e^{rx}$ ger

$$(a_2 r^2 + a_1 r + a_0) e^{rx} = 0$$

dvs. vi får den karakteristiska ekvationen

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Detta ger tre fall

(i) (2) har två olika reella lösningar r_1, r_2, $r_1 \neq r_2$

Allmän lösning: $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) (2) har en reell dubbelrot r_1

Allmän lösning: $y(x) = (c_1 x + c_2) e^{r_1 x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) (2) har två icke-reella rötter $\alpha \pm i\beta$

Allmän lösning: $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(Behandlas som del av teorin för linjära system av första ordningens ODE senare.)

Ex. $y'' + 4y = 0$ ger $r^2 + 4 = 0$, $r = \pm 2i$

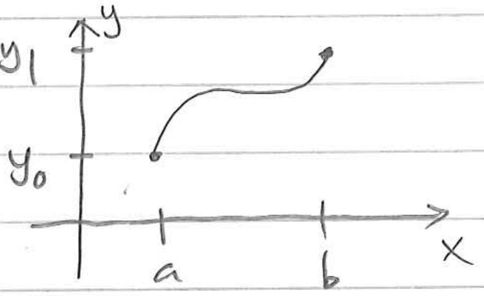
$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

Randvärdesproblem

Betrakta ekvationen

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad a < x < b$$

under randvillkoren $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, y_0, y_1 givna.
Vi söker alltså en lösning i $[a,b]$ som uppfyller villkoren $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ på randen $\{a,b\}$ till intervallet.



Andra möjliga randvillkor är t.ex. $y'(a) = y_0$ eller kombinationer $y(a) + cy'(a) = y_0$, c konstant, och motsvarande i b.

Ex. $y'' + 4y = 0$ på $[0, \pi]$; $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

1) Randvillkor: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Insättning ger

$y(0) = c_1 = 0$, $y(\pi) = c_1 = 0$, $y(x) = c_2 \sin 2x$ löser randvärdesproblemet för alla $c_2 \in \mathbb{R}$. Oändligt många lösningar.

2) Randvillkor: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$
$c_1 = 0$ som ovan. $y(\pi) = c_1 = 0 \neq 1$. Ingen lösning

3) Samma ekvation på $[0, \frac{\pi}{4}]$, $y(0) = y(\pi/4) = 0$
$y(0) = 0$ ger $c_1 = 0$; $y(\pi/4) = c_2 \sin\frac{\pi}{2} = c_2 = 0$.
$y = 0$ enda lösningen

Operatorform för linjära ODE

Låt $D = \frac{d}{dx}$ beteckna deriveringsoperatorn. (1) kan skrivas

$$\underbrace{\left(a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + a_1(x) D + a_0(x)\right)}_{L} y = g(x)$$

dvs.

$$Ly = g \quad , \quad L(y(x)) = g(x)$$

L är en linjär operator på funktioner.

$$L(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 L(y_1(x)) + c_2 L(y_2(x))$$

om c_1, c_2 är konstanter.

Homogena ekvationer

Om $g = 0$ har vi en homogen n:te ordningens ODE:

$$L(y(x)) = 0 .$$

Om g ej är identiskt 0, $g(x) \neq 0$ för något x, har vi en inhomogen n:te ordningens ODE

Sats (Superpositionsprincipen för homogena ekvationer).

Om $y_1, \dots, y_n$ är lösningar till den homogena ekvationen

$$Ly = 0$$

så är $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, c_i konstanter, också en lösning.

Linjärkombinationer av lösningar ger nya lösningar till en homogen linjär ekvation.

Bevis:

$$Ly = L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = c_1 L y_1 + \dots + c_n L y_n = c_1 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = 0.$$

■

<u>Def.</u> Funktionerna $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sägs vara <u>linjärt beroende</u> på intervallet I om det finns konstanter $c_1, c_2, \dots, c_n$ ej alla $=0$ så att

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

för <u>alla</u> $x \in I$. Om de inte är linjärt beroende på I sägs de vara <u>linjärt oberoende</u> på I.

<u>Ex.</u> $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$, $\sin x$, $\cos x$ är linjärt beroende på $\mathbb{R}$.

Vi har att $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$

$$1 \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = 0, \quad \text{alla } x \in \mathbb{R}.$$

<u>Def.</u> Om $f_1(x), \dots, f_n(x)$ har derivator i x till och med ordning $n-1$ så kallas

$$W(f_1(x), \dots, f_n(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

för <u>Wronskianen</u> av funktionerna i punkten x.

Sats Om $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ är linjärt beroende på I så är $W(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0$ på I.

Bevis: Vi skriver beviset i fallet $n=3$. Det finns konstanter c_1, c_2, c_3 ej alla $=0$ så att

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad , \quad x \in I$$

Derivering ger

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + c_3 f_3'(x) = 0 \quad , \quad x \in I$$

$$c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + c_3 f_3''(x) = 0 \quad , \quad x \in I$$

För varje $x \in I$ har alltså ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en icke-trivial lösning. Detta är möjligt bara om determinanten, dvs. $W(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 0$. ■

Ex. $\sin x$ och $\cos x$ är linjärt oberoende på $[0, 2\pi]$

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

Alltså kan de inte vara linjärt beroende.

<u>Sats</u> Låt $y_1, \ldots, y_n$ vara lösningar till den homogena ODE:n

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ , \quad x \in I. \qquad (3)$$

Då är $y_1, \ldots, y_n$ linjärt oberoende på I om och endast om $W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ för alla $x \in I$.

<u>Bevis:</u> 1) Om $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ ger föregående sats att de är linjärt oberoende.
2) Antag att $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ är linjärt oberoende lösningar och att $W(y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = 0$ för något $x_0 \in I$.
Då finns $c_1, \ldots, c_n$, ej alla 0, så att

$$c_1 y_1^{(k)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(k)}(x_0) = 0 \ , \quad k = 0, \ldots, n-1, \qquad (4)$$

ty enligt en sats från linjär algebra så har det linjära, homogena ekvationssystemet (4) för $c_1, \ldots, c_n$ en icke-trivial lösning om dess determinant är $= 0$. Sätt

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

där vi utnyttjar dessa $c_1, \ldots, c_n$. Då är $y(x)$ en lösning till (3) som uppfyller $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$.
Entydighetssatsen ger då att enda möjligheten är att $y(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Detta strider mot att $y_1, \ldots, y_n$ är linjärt oberoende. ∎

Ex. $y'' + y = 0$, $x \in \mathbb{R}$ har lösningarna $\sin x$ och $\cos x$ som är linjärt oberoende. Alla lösningar kan skrivas som en linjärkombination av dessa två lösningar:

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Mängden av alla lösningar bildar ett vektorrum, lösningsrummet, eftersom linjärkombinationer av lösningar också är lösningar. Funktionerna $\sin x$, $\cos x$ är en bas i detta lösningsrum, vi säger att de utgör en fundamentalmängd av lösningar.

Vi vill generalisera det vi såg i exemplet till allmänna linjära, homogena n:te ordningens ODE.

Def. Varje uppsättning $y_1, \ldots, y_n$ av linjärt oberoende lösningar till (3) kallas en fundamentalmängd av lösningar på I.

Sats Det finns en fundamentalmängd av lösningar till (3).

Bevis: Utelämnas. Bygger på existenssatsen.

Nästa sats säger att linjärkombinationer av funktioner i fundamentalmängden ger alla lösningar.

<u>Sats</u> Låt $y_1, \dots, y_n$ vara en fundamentalmängd av lösningar till (3). Den allmänna lösningen till (3) på I ges då av

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n,$$

där $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ är godtyckliga konstanter.

<u>Bevis:</u> Antag $n = 2$. Det allmänna fallet är analogt. Låt Y vara en lösning till

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{på } I, \tag{5}$$

och låt $\{y_1, y_2\}$ vara en fundamentalmängd. Vi vill visa att det finns konstanter c_1, c_2 så att

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{6}$$

Derivering ger att då måste även

$$Y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \tag{7}$$

gälla. Tag $x_0 \in I$. Enligt tidigare sats gäller då att Wronskianen

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Då finns entydiga konstanter c_1, c_2 så att

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0) \\ c_2 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases} \tag{9}$$

eftersom detta ekvationssystem för c_1, c_2 har determinanten (8) som är $\neq 0$. Alltså gäller (6) och (7) i x_0.
Vi vill visa att (6) gäller för <u>alla</u> $x \in I$.
Sätt

$$G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - Y(x)$$

och låt $L = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$. Då $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd och Y en lösning är

$$Ly_1 = Ly_2 = LY = 0 \quad \text{på } I.$$

Alltså är

$$LG = L(c_1 y_1 + c_2 y_2 - Y) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 - LY = 0.$$

Dessutom är

$$G(x_0) = G'(x_0) = 0 \quad \text{enligt (9)}.$$

G löser alltså begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} Ly = 0 & \text{på } I \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Detta problem har den entydiga lösningen $y = 0$, dvs. vi har att

$$G(x) = 0, \quad x \in I,$$

vilket ger att (6) gäller för alla $x \in I$. ■

Ex. Visa att $\{x^3, x^4\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0 \quad i \quad (0, \infty) \qquad (*)$$

och ge den allmäna lösningen. Bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

Om $c_1 x^3 + c_2 x^4 = 0$ på $(0,\infty)$ så måste $c_1 = c_2 = 0$ ty ett polynom är identiskt noll på $(0,\infty)$ endast om alla koefficienter är 0. Alternativt ser vi att Wronskianen

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^6 - 3x^6 = x^6 \neq 0 \quad \text{om } x > 0.$$

Derivering visar att x^3 och x^4 löser $(*)$. Den allmäna lösningen ges alltså av

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^4$$

Vi får

$$y'(x) = 3c_1 x^2 + 4c_2 x^3$$

$y(1) = 1,\ y'(1) = 0$ ger

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

$y(x) = 4x^3 - 3x^4$ löser begynnelsevärdesproblemet.