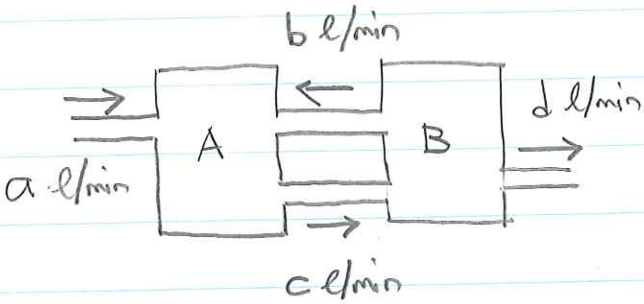
Föreläsning 4

SF 1633 Differentialekvationer, HT 2016, Kurt Johansson

Modellering med system av ODE

$\boxed{\text{Kopplade system}}$

Ex. Blandningar, kopplade behållare



A, B blandare

$x_1(t)$ = mängden salt i A vid tiden t

$x_2(t)$ = mängden salt i B vid tiden t

$a+b=c$, $b+d=c$, $a=d$

V_1 = volym av A, V_2 = volym av B

k = antal kg/l salt i inflödet till A

$$\frac{dx_1}{dt} = \underbrace{ak + b\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konc. i B}}}{\frac{x_2}{V_2}}}_{\substack{\text{tillförd saltmängd} \\ \text{per min}}} - \underbrace{c\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konc. i A}}}{\frac{x_1}{V_1}}}_{\substack{\text{bortförd saltmängd} \\ \text{per min}}}$$

Behållare A

$$\frac{dx_2}{dt} = \underbrace{c \cdot \frac{x_1}{V_1}}_{\substack{\text{tillförd saltmängd} \\ \text{per min}}} - \underbrace{\left(b \cdot \frac{x_2}{V_2} + d\frac{x_2}{V_2}\right)}_{\substack{\text{bortförd saltmängd} \\ \text{per min}}}$$

Behållare B

$$= (b+d)\frac{x_2}{V_2} = c\frac{x_2}{V_2}$$

Vi får ett system av ODE

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ak - \dfrac{c}{V_1}x_1 + \dfrac{b}{V_2}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{c}{V_1}x_1 - \dfrac{c}{V_2}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Begynnelsevillkor: $x_1(0) = m_1$ = mängd salt i A vid $t=0$

$x_2(0) = m_2$ = " " i B "

Det är behändigt att skriva (1) i matrisform

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{c}{V_1} & \frac{b}{V_2} \\ \frac{c}{V_1} & -\frac{c}{V_2} \end{pmatrix}$$

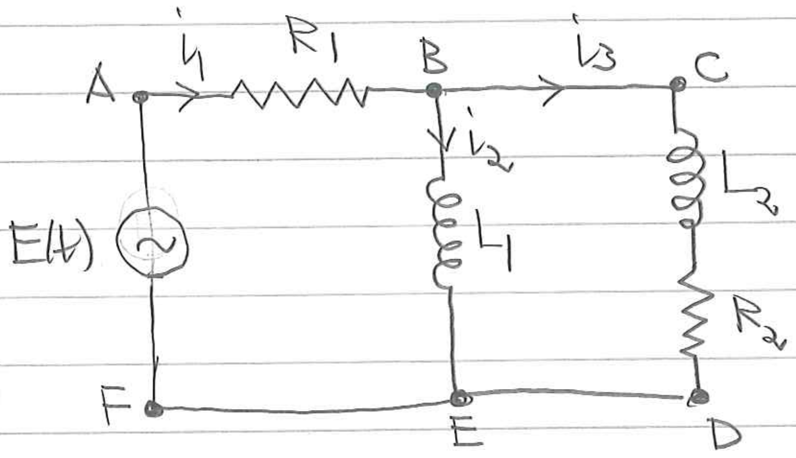
$$\bar{F} = \begin{pmatrix} ak \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) kan skrivas

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{F}$$

Linjärt system, första ordningen.

Ex. Elektriskt nätverk



Spänningsfall över resistor : Ri

" " spole : $L\frac{di}{dt}$

$i_1 = i_2 + i_3$ (Kirchoffs första lag)

Kretsen ABEFA:

$$E - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \qquad \text{(Kirchoffs andra lag)} \qquad (2)$$

Kretsen BCDEB:

$$-L_2 \frac{di_3}{dt} - R_2 i_3 + L_1 \frac{di_2}{dt} \qquad (\quad -\text{"}- \quad)$$

mot strömriktning

$$-L_2 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} - R_2(i_1 - i_2) + L_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (3)$$

Antag $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $R_1 = 2$, $R_2 = 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{di_2}{dt} = E - 2i_1 \\ -2\left(\dfrac{di_1}{dt} - \dfrac{di_2}{dt}\right) + \dfrac{di_2}{dt} = i_1 - i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} - \dfrac{3}{2}\dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{1}{2}i_1 + \dfrac{1}{2}i_2 \\ \dfrac{di_2}{dt} = -2i_1 + E \end{cases}$$

Eliminera $\frac{di_2}{dt}$ i första ekvationen. $\left(\begin{array}{l}\frac{3}{2}\cdot \text{andra ekv.} \\ \text{läggs till första ekv.}\end{array}\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{7}{2}i_1 + \dfrac{1}{2}i_2 + \dfrac{3}{2}E \\ \dfrac{di_2}{dt} = -2i_1 + E \end{cases}$$

Vi kan skriva detta på matrisform

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}E(t) \\ E(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = A\bar{I} + \bar{F}(t)$$

Linjärt första ordningens system.

<u>Ex.</u> <u>Rov-Bytesdjursmodell</u>

(Predator-Prey model). Populationsdynamik.

$x(t)$ = antalet rävar vid tiden t

$y(t)$ = " kaniner "

$$\frac{dx}{dt} = \underset{\uparrow}{-Ax} + \underset{\uparrow}{Bxy} \qquad A, B > 0$$

rävar utan mat dör ut exponentiellt

tillväxten är proportionell mot antalet rävar och antalet kaniner

$$\frac{dy}{dt} = \underset{\uparrow}{Dy} - \underset{\uparrow}{Cxy} \qquad D, C > 0$$

kaniner utan fiender tillväxer proportionellt mot antalet kaniner

kaninantalet avtar proportionellt mot antalet kaniner och antalet rävar

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Ax + Bxy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = Dy - Cxy \end{cases}$$

<u>Lotka-Volterras ekvation</u>

Har lösningar som är periodiskt varierande.

<u>Icke-linjärt</u> första ordningens system ty vi har produkten xy av de två beroende variablerna.

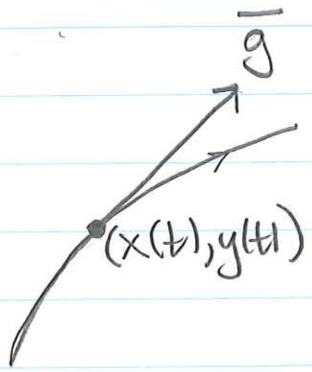
$t \to (x(t), y(t))$ lösningskurva

$$\bar{g}(x,y) = (-Ax + Bxy, Dy - Cxy)$$

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = \bar{g}(x,y)$$

hastighet i punkten $(x(t), y(t))$ (tangentvektor)

vektorfält



Vi söker en lösningskurva som går genom en viss punkt $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, begynnelsevillkor, och vars hastighetsvektor i varje punkt ges av vektorfältet $\bar{g}(x,y)$.

Antag att lösningskurvan till Lotka-Volterras ekvation ges av en funktionskurva $y(x)$ nära en viss punkt. Då gäller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Dy - Cxy}{-Ax + Bxy} = \frac{y(D - Cx)}{x(Bx - A)}$$

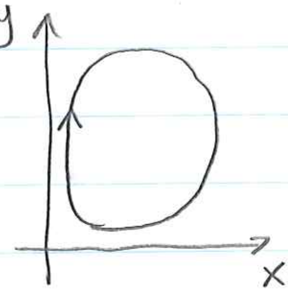
↑
riktningskoefficient

Separabel ekvation $\qquad x, y > 0$

$$\frac{By - A}{y}\,dy = \frac{D - Cx}{x}\,dx$$

$$\int \left(B - \frac{A}{y}\right) dy = \int \left(\frac{D}{x} - C\right) dx + c_1 \quad \leftarrow \text{konstant}$$

$$By - A\ln y = D\ln x - Cx + c_1$$



Exponentiering ger

$$e^{By - A\ln y} = e^{D\ln x - Cx + c_1}$$

$$\frac{1}{y^A} e^{By} = e^{c_1} x^D e^{-Cx}$$

$$(x^D e^{-Cx})(y^A e^{-By}) = \text{konstant} \quad \Leftarrow$$

Lösningskurvor del av dessa <u>nivåkurvor</u>

<u>Ex.</u> Testa att plotta nivåkurvor till

$$f(x,y) = xy e^{-(x+y)}$$; ger slutna kurvor i första kvadranten

Ex. Kemisk reaktionskinetik

$$A + 2B \rightleftarrows C$$ (reversibel reaktion)

$a = [A]$, $b = [B]$, $c = [C]$ koncentrationer som funktioner av tiden

reaktionstakt ($\longrightarrow$):

$$a' = \frac{1}{2} b'$$ (tidsderivator)

reaktionstakt ($\longleftarrow$): c'

Massverkans lag: reaktionstakten är proportionell mot produkten av reaktanternas koncentrationer

($\longrightarrow$): $[A][B]^2$

det behövs 2 B-molekyler

($\longleftarrow$): $[C]$

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab^2 + k_2 c \\ b' = -2k_1 ab^2 + 2k_2 c \\ c' = k_1 ab^2 - k_2 c \end{cases}$$

k_1, k_2 konstanter

Icke-linjärt system av ODE.