Föreläsning 3

SF1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson.

En teknik som ibland är användbar både för ODE och PDE är variabelbyten. Syftet är att överföra ekvationen till en form som vi kan lösa eller redan har teori för. Vi betraktar ett par exempel som illustrerar detta.

Homogen ekvation

Om vi har en ekvation på formen

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

är det naturligt att göra variabelbytet $u = \frac{y}{x}$, dvs. $y = ux$. Vi får

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$$

så (1) blir

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u)$$

som är en separabel ekvation.

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

i en omgivning av $x=1$.

Ekvationen kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad , x, y \neq 0$$

Variabelbytet $u = y/x$, $y = ux$ ger

$$x\frac{du}{dx} + u = u - \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2}$$

$$u^2 du = -\frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int u^2 du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^3}{3} = -\ln|x| + c_1 \Leftrightarrow u^3 = C - 3\ln|x| ,$$

där $C = 3c_1$. Substituera tillbaka $u = y/x$.

$$y^3/x^3 = C - 3\ln x \Leftrightarrow y^3 = x^3(C - 3\ln x).$$

Vi vill ha $x > 0$ eftersom begynnelsepunkten är $x = 1$.

Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger

$$2^3 = 1^3(C - 3\ln 1) \Rightarrow C = 8$$

Lösning: $y^3 = x^3(8 - 3\ln|x|)$.

Kring $x = 1$ är högra ledet > 0 och vi kan ta kubikroten och få

$$y = x(8 - 3\ln x)^{1/3}$$

Denna lösning existerar då

$8 - 3\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \cancel{|x|}\, x \leq e^{8/3}$.

Svar: $y = x(8-3\ln x)^{1/3}$ för $0 < x \leq e^{8/3}$.

Bernoullis ekvation

Denna ger ytterligare ett exempel där vi kan använda ett variabelbyte

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Den logistiska ekvationen är en Bernoulliekv. med $n=2$.

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x) \quad , \; y \neq 0$$

(*)

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{y^{n-1}}\right) + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x)$$

Om vi tar $u = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$ som ny variabel får vi den linjära ekvationen

$$-\frac{1}{n-1}\frac{du}{dx} + P(x)u = f(x)$$

som vi kan lösa med de idéer vi använt tidigare.

(*) Notera att

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{y^{n-1}} = \frac{d}{dx}y^{1-n} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \text{dvs.}$$

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right).$$

Ex. Lös ekvationen

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^{1/2} \quad , \; y \geq 0$$

$n = 1/2$, $u = \sqrt{y}$ ger enligt ovan

$$\frac{1}{1-1/2}\frac{du}{dx} + u = x \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}u = \frac{x}{2}$$

$e^{x/2}$ är en integrerande faktor.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x/2}u\right) = \frac{x}{2}e^{x/2}$$

$$e^{x/2}u = \int \frac{x}{2}e^{x/2}\,dx + C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partiell integration}}}{=} (x-2)e^{x/2} + C$$

$$u = x - 2 + Ce^{-x/2}$$

$$y = u^2 = \left(x - 2 + Ce^{-x/2}\right)^2$$

Lösningen $y = 0$ fås ej för något $C \in \mathbb{R}$ (eller $C \to \pm\infty$). Singulär lösning.

Svar: $y = \left(x - 2 + Ce^{-x/2}\right)^2$, $C \in \mathbb{R}$

$y = 0$

Modeller

Ex. Newtons avsvalningslag (empirisk lag)

T = temperaturen hos ett objekt, t. ex en kopp kaffe, som en funktion av tiden

Om temperaturvariationerna inte är alltför stora gäller approximativt

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \qquad k < 0, \; T > T_m$$

där T_m är omgivningens temperatur och k en konstant.

En kopp kaffe har temperaturen 70°C och 4 min. senare är temperaturen 60°C. Om omgivningens temperatur är 25°C, hur lång tid tar det innan kaffets temperatur är 50°C?

$T_m = 25$. Vi får ekv.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 25),$$

som är en linjär ekvation (också separabel)

$$\frac{dT}{dt} - kT = -25k$$

e^{-kt} är en integrerande faktor

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-kt}T\right) = -25ke^{-kt}$$

$$e^{-kt}T = 25e^{-kt} + C$$

$$T = 25 + Ce^{kt} \qquad (\to 25 \text{ då } t \to \infty \text{ ty } k<0)$$

$$T(0) = 25 + C = 70 \text{ ger } C = 45$$

$$T = 25 + 45e^{kt}$$

$$T(4) = 25 + 45e^{4k} = 60, \quad e^{4k} = \frac{35}{40}$$

$$k = \frac{1}{4}\ln\frac{35}{45} \quad (<0)$$

Låt t_0 vara tiden då temperaturen är 50°C.

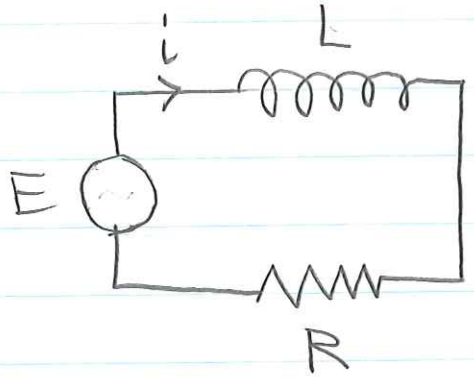
$$25 + 45e^{kt_0} = 50, \quad e^{kt_0} = \frac{25}{45}$$

$$kt_0 = \ln\frac{25}{45}$$

$$t_0 = \frac{1}{k}\ln\frac{25}{45} = 4\,\frac{\ln(25/45)}{\ln(35/45)} \approx 9{,}4$$

Svar: Efter drygt 9 min.

Ex. LR-krets



E konstant

Spänningen kopplas på vid tiden 0 så att för strömmen $i(t)$ gäller $i(0)=0$. Härled en formel för strömmen som funktion av t.

$$E - L\frac{di}{dt} - Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t} i\right) = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

$$e^{\frac{R}{L}t} i = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C$$

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad i(0) = \frac{E}{R} + C = 0$$

$$C = -\frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \underbrace{- \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}}_{\to 0 \text{ då } t \to \infty}$$

$\to 0$ då $t \to \infty$, transient

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(Ri - E)$$, autonom ekvation

$$i = \frac{E}{R}$$ stationär lösning.

Ex. En population utvecklas i tiden enligt ekvationen

oscillerande tillväxttakt

$$\frac{dP}{dt} = (a - b\cos\omega t)P \quad , \quad P(0) = P_0 .$$

där a, b, ω är konstanter, $b, \omega > 0$. Studera hur populationen utvecklas då tiden $t \to \infty$. Hur beror detta på värdena av a, b, ω?

Ekvationen är separabel.

$$\int \frac{dP}{P} = \int (a - b\cos\omega t)\,dt$$

$$\ln|P| = at - \frac{b}{\omega}\sin\omega t + C_1$$

$$P = P_0 e^{at - \frac{b}{\omega}\sin\omega t}$$

periodisk

$a > 0$: $P \to \infty$, då $t \to \infty$

$a = 0$: P periodisk

$a < 0$: $P \to 0$ då $t \to \infty$.

Säg att $P_0 = 10000$, $a = 1$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $b = 6\pi$

$P(1) = 10000e^{1-12\cdot 1} = 10000e^{-11} \approx 0{,}17$

Hur många individer är detta?

Vi har att $P(t) \to \infty$ men innan dess får vi värden nära 0 vilket gör slutsatsen $P(t) \to \infty$ tveksam. Kanske är modellen inte rimlig över långa tidsintervall?

Om $b > a$ är tillväxttakten > 0 ibland och < 0 ibland.