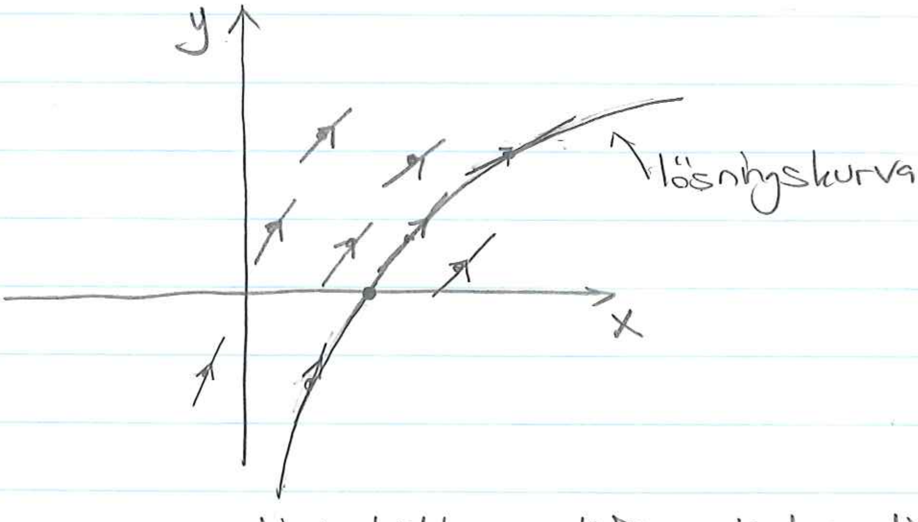
Föreläsning 2

SF1633 Differentialekvationer, HT 2015. Kurt Johansson

Riktningsfält

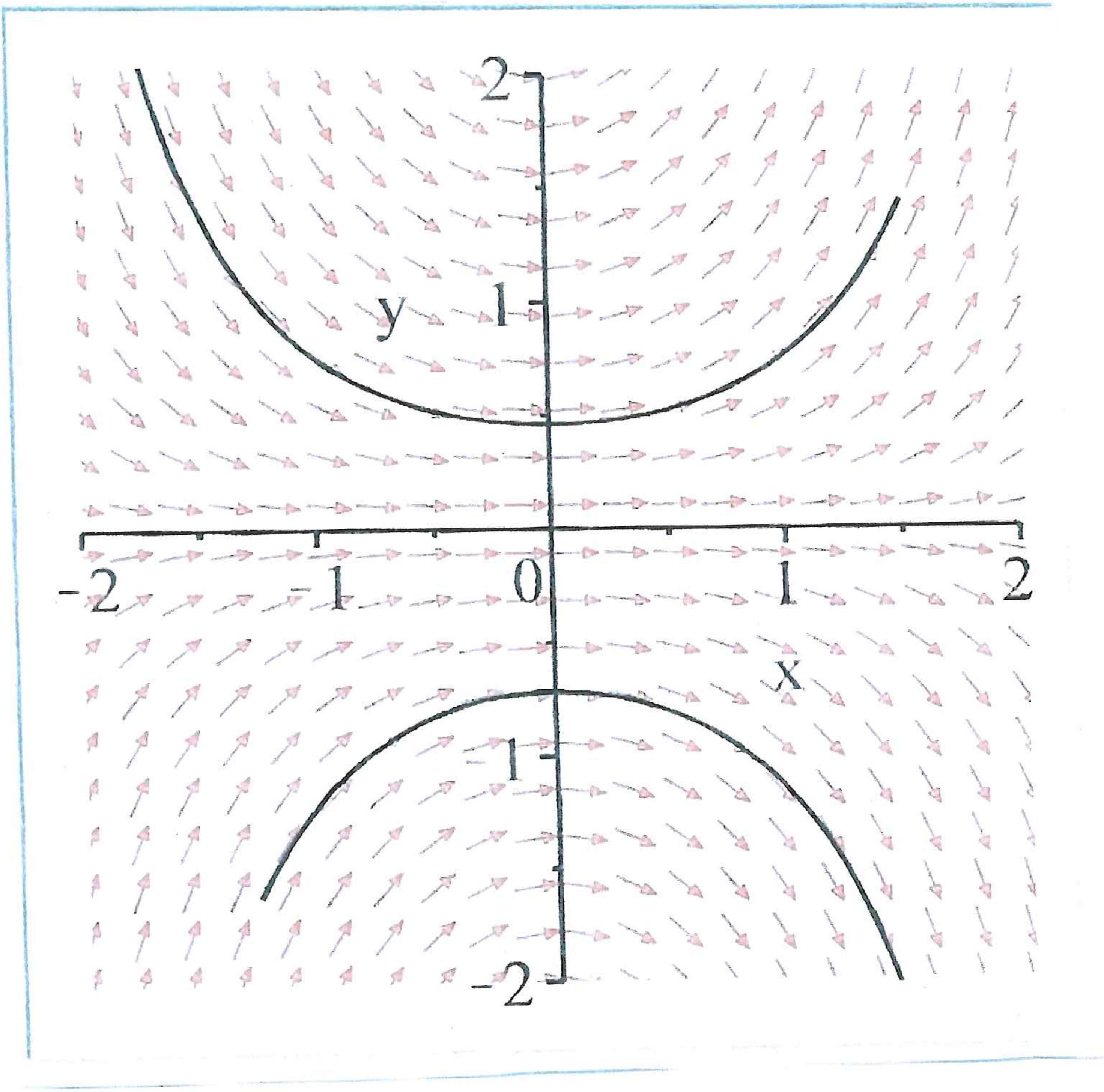
$y' = f(x,y)$ ← ger riktningskoefficienten för tangenten till lösningskurvan i punkten (x,y).

Rita ett kort linjestycke i punkten (x,y). Detta illustrerar ett riktningsfält.



Ger oss en geometrisk bild av differentialekvationen.

$y' = xy$



Autonoma första ordningens ODE

$$y' = f(y) \qquad (1)$$

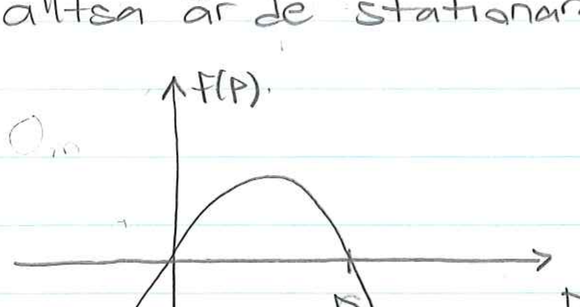
↖ beror ej på x

c är en kritisk punkt till (1) om $f(c)=0$. Då är $y=c$ en lösning till (1), en stationär punkt eller jämviktspunkt. Om x tolkas som en tidsvariabel så stannar vi i $y=c$ om vi startar där.

Ex. Betrakta den logistiska ekvationen

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{D}\right) \qquad k, D>0$$

Högra ledet $=0$ om $P=0$ eller $P=D$, som alltså är de stationära punkterna.



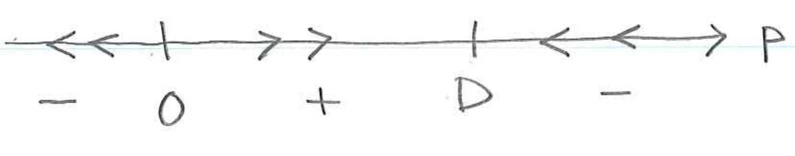
$$f(P) = kP\left(1-\frac{P}{D}\right)$$

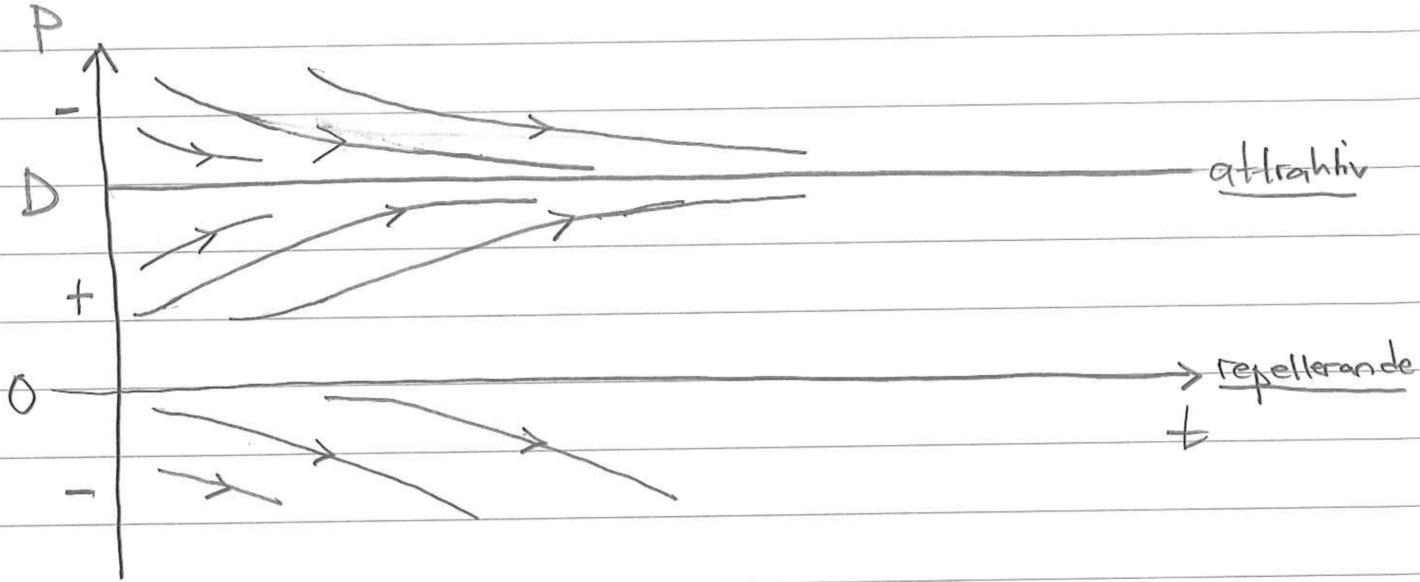
$f(P)<0$ då $P<0$ eller $P>D$

$f(P)>0$ då $0<P<D$

Detta ger oss omedelbart en viss kvalitativ information om hur lösningar beter sig. Om $f(P)<0$ är

$\frac{dP}{dt} = f(P) < 0$, $P(t)$ avtagande, om $f(P)>0$ är $P(t)$ växande.





$P=0$ är en <u>repellerande fixpunkt</u> / <u>instabil fixpunkt</u>

$P=D$ är en <u>attrahtiv fixpunkt</u> / <u>stabil fixpunkt</u>

Vi förväntar oss att $P(t) \to D$ då $t \to \infty$, $P_0 > 0$.
Att verkligen visa detta (utan att lösa ekvationen) kräver ett inte helt enkelt argument.
(Kvalitativ teori)

Exakta lösningar av vissa första ordningens ODE

Separabla ekvationer

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{h(y)}}_{f(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \quad \text{om } h(y) \neq 0$$

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (2)$$

Låt $F(y)$ vara en primitiv funktion till $f(y)$.
(2) kan skrivas

$$\frac{d}{dx} F(y) = g(x)$$

enligt kedjeregeln, ty

$$\frac{d}{dx} F(y) = F'(y)\frac{dy}{dx} = f(y)\frac{dy}{dx}.$$

Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$ ger detta

$$F(y) = G(x) + c \quad , \; c \in \mathbb{R},$$

vilket ger implicita lösningar till (2). Man skriver ofta

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \quad \text{som}$$

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

vilket ger $\underbrace{\int f(y)\,dy}_{F(y)} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)+c}$

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$ ger $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx + c_1$

$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

$|y| = e^{c_1 + \frac{1}{2}x^2} = e^{c_1}e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{= C \text{, ny konstant}} e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. Vi ser att $C = 0$ också går bra.

$y(0) = Ce^0 = C = 1$.

Svar: $y = e^{x^2/2}$.

Ex. Logistiska ekvationen

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{D}\right) = \frac{k}{D}P(D-P) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

k, D konstanter

Antag $P \neq 0, D$ (stationära lösningarna)

$\frac{dP}{P(D-P)} = \frac{k}{D}\,dt$, $\int \frac{dP}{P(D-P)} = \int \frac{k}{D}\,dt$

$\int \frac{k}{D}\,dt = \frac{k}{D}t + c_1$

$$\frac{1}{P(D-P)} = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{P} - \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{P-D}$$

(partialbråksuppdelning)

Ansatsen $\frac{1}{P(D-P)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{D-P}$ ger

$$\frac{1}{P(D-P)} = \frac{a(D-P)+bP}{P(D-P)} = (b-a)P + aD$$

$aD = 1$ och $b-a=0$ ger $a=b=\frac{1}{D}$.

$$\int \frac{dP}{P(D-P)} = \int \frac{1}{D}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P-D}\right) dP = \frac{1}{D}\left(\ln|P| - \ln|P-D|\right) + C_2$$

$$\frac{1}{D}\left(\ln|P| - \ln|P-D|\right) + C_2 = \frac{k}{D} + C_1 \qquad (C_3 = D(C_1 - C_2))$$

$$\ln\left|\frac{P}{P-D}\right| = kt + C_3 \iff \left|\frac{P}{P-D}\right| = e^{C_3} e^{kt}$$

$$\frac{P-D}{P} = \underbrace{\pm e^{-C_3}}_{C_4} e^{-kt}$$

$$1 - \frac{D}{P} = C_4 e^{-kt} \iff \frac{D}{P} = 1 - C_4 e^{-kt}$$

$$P = \frac{D}{1 - C_4 e^{-kt}}.$$ Detta ger

$$P_0 = P(0) = \frac{D}{1 - C_4} \iff C_3 = 1 - \frac{D}{P_0}.$$

Vi får lösningen

$$P(t) = \frac{D}{1+\left(\frac{D}{P_0}-1\right)e^{-kt}}$$

Eftersom $k>0$ ser vi att $e^{-kt} \to 0$ då $k \to \infty$.
Alltså

$$P(t) \to \frac{D}{1+0} = D \quad \text{då } t \to \infty.$$

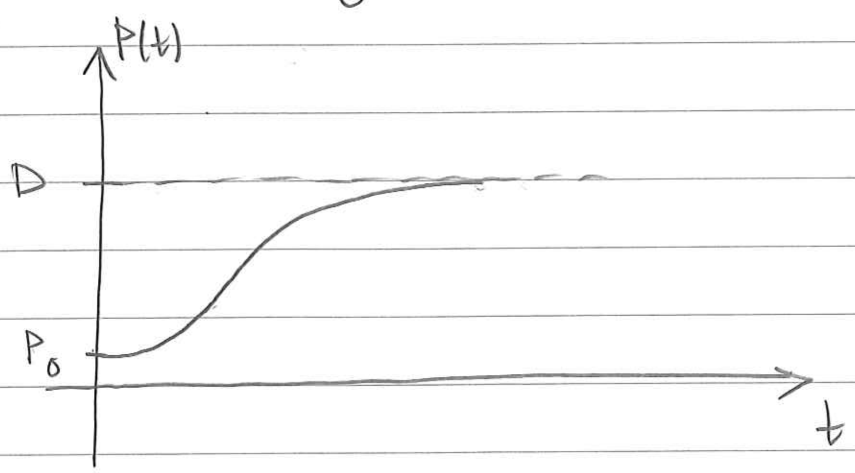
Vi kan skriva vår lösning som

$$P(t) = \frac{P_0}{\frac{P_0}{D} + \left(1-\frac{P_0}{D}\right)e^{-kt}} = \frac{P_0 e^{kt}}{\frac{P_0}{D}e^{kt} + 1 - \frac{P_0}{D}}$$

Om $P_0 << D$ och t är litet är nämnaren ≈ 1
och

$$P(t) \approx P_0 e^{kt},$$

dvs. till en början får vi exponentiell tillväxt



Linjära ekvationer av första ordningen

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)$$ — **homogen** om $g = 0$, **inhomogen** om $g \neq 0$

Betrakta ekvationen för de x för vilka $a_1(x) \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = f(x), \quad h(x) = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}, \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Låt
$$H(x) = \int h(x)\,dx$$
vara en primitiv funktion till $h(x)$. Multiplicera ekvationen med
$$e^{H(x)}$$
(*integrerande faktor*)

$$e^{H(x)}\frac{dy}{dx} + h(x)e^{H(x)}y = f(x)e^{H(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{H(x)}\right) = f(x)e^{H(x)}$$

enligt kedjeregeln och produktregeln för derivata.

$$ye^{H(x)} = \int f(x)e^{H(x)}\,dx + C$$

Den allmänna lösningen ges av

$$y = e^{-H(x)}\int f(x)e^{H(x)}\,dx + Ce^{-H(x)}$$

↑ kan vara svår att räkna ut explicit.

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$y' - xy = x^3$$

$h(x) = -x$ har en primitiv funktion $H(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Multiplicera ekvationen med $e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$e^{-x^2/2}y' - xe^{-x^2/2}y = x^3 e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}y\right) = x^3 e^{-x^2/2}$$

$$e^{-x^2/2}y = \int x^3 e^{-x^2/2}\,dx + C$$

$$y = e^{x^2/2}\int x^3 e^{-x^2/2}\,dx + Ce^{x^2/2}$$

Den primitiva funktionen kan i detta fall beräknas med partiell integration

$$\int x^3 e^{-x^2/2}\,dx = -\int x^2(-xe^{-x^2/2})\,dx$$

$$= -\left(x^2 e^{-x^2/2} - \int 2xe^{-x^2/2}\,dx\right)$$

$$= -x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2}$$

Alltså

$$y = e^{x^2/2}\left(-x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2}\right) + Ce^{x^2/2}$$

$$= -x^2 - 2 + Ce^{x^2/2}$$

Kontroll: Verifiera lösningen

$$y' = -2x + Cxe^{x^2/2}$$

$$y' - xy = -2x + Cxe^{x^2/2} - x\left(-x^2 - 2 + Ce^{x^2/2}\right) = x^3.$$

Observera att om $C = 0$ får vi $y = -x^2 - 2$ som en möjlig lösning till ekvationen, en partikulär-lösning.

$y = Ce^{x^2/2}$ löser motsvarande homogena ekvation

$$y' - xy = 0.$$

Den allmänna lösningen ges alltså av en partikulärlösning plus den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. Vi skall se att detta gäller allmänt för linjära ODE.

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$x^2 y' - y = 1$$

Antag $x \neq 0$.

$$y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x}$ är en primitiv funktion till $-\frac{1}{x^2}$.

$$e^{1/x} y' + \frac{1}{x^2} e^{1/x} y = \frac{1}{x^2} e^{1/x}$$

$$(e^{1/x} y)' = \frac{1}{x^2} e^{1/x}, \quad e^{1/x} y = -e^{1/x} + C$$

$$y = -1 + Ce^{-1/x} \quad \text{om} \quad x \neq 0$$

Lösningen är definierad i $(-\infty, 0)$ och i $(0, \infty)$, diskontinuerlig i $x = 0$:

$y \to -1$ då $x \to 0+$

$y \to \infty$ då $x \to 0-$

(Detta är också en separabel ekvation.)